

Úkol

Pracovní úkol

- Okalibrujte pomocí bodu tání ledu, bodu varu vody a bodu tuhnutí cínu:
 - platinový odporový teploměr (určete konstanty R_0 , A , B)
 - termočlánek měď-konstantan (určete konstanty a , b , c)
- Registrujte zapisovačem teplotní průběh termoelektrického napětí ε při ohřevu a varu vody a při tuhnutí cínu. Naměřené křivky s úplnými údaji o experimentu přiložte k referátu.
- Nakreslete graf teplotní závislosti odporu R (kalibrační křivka odporového teploměru) a graf teplotní závislosti termoelektrického napětí ε (kalibrační křivka termočlánu).

Klíčová slova

fázový přechod, termočlánek, odporový teploměr

Pokyny k měření

- Při realizaci všech teplotních bodů dbejte na dokonalé ustálení teploty.
- V průběhu měření v parách vroucí vody je možné zatím tavit cín. Je třeba cín zbytečně nepřehřát. Cín tavíme přibližně 12 minut (k odměření této doby užíváme vypínacích hodin VIPO), v případě, že pícka zůstala teplá po předchozím studentovi, 8 minut. Cín se roztaví vždy několik minut po vypnutí pícky. Po skončení měření pícku zapneme na 3 – 5 minut a vyjmeme termočlánek i teploměr a řádně očistíme.
- S vroucí vodou i cínem pracujte opatrně!

Teorie

Kalibrace odporového teploměru

Podle Callendarovy-Van Dusenovy rovnice pro odpor platinového teploměru v teplotním intervalu $0^\circ\text{C} - 661^\circ\text{C}$ je závislost $R(t)$ tohoto odporu na teplotě t (ve stupních Celsia) v řečeném intervalu [1]:

$$R(t) = R_0 \cdot (1 + At + Bt^2) \quad (1)$$

kde R_0 , A , B jsou konstanty.

Pro $i \in \{1; 2; 3\}$, určující měření za podmínek lišících se teplotou, označme:

t_i teplota měřená teploměrem

R_i odpor teploměru

Pak lze konstanty R_0 , A , B vyjádřit:

$$R_0 = \frac{t_1^2(t_2R_3 - t_3R_2) + t_2^2(t_3R_1 - t_1R_3) + t_3^2(t_1R_2 - t_2R_1)}{(t_3 - t_2)(t_1 - t_3)(t_2 - t_1)} \quad (2)$$

$$A = \frac{t_1^2(R_3 - R_2) + t_2^2(R_1 - R_3) + t_3^2(R_2 - R_1)}{t_1^2(R_2t_3 - R_3t_2) + t_2^2(R_3t_1 - R_1t_3) + t_3^2(R_1t_2 - R_2t_1)} \quad (3)$$

$$B = \frac{t_1(R_3 - R_2) + t_2(R_1 - R_3) + t_3(R_2 - R_1)}{t_1^2(t_2R_3 - t_3R_2) + t_2^2(t_3R_1 - t_1R_3) + t_3^2(t_1R_2 - t_2R_1)} \quad (4)$$

Kalibrace termočlánu

Termočlánu jsou založeny na termoelektrickém jevu: termočlánek se skládá ze dvou vodičů, na koncích vodivě spojených. Dvojitým termočlánekem lze měřit teplotní rozdíl obou spojů — uvedeme-li je na různou teplotu, vznikne mezi nimi termoelektrické napětí ε , závislé na rozdílu Δt těchto teplot. Obvykle je postačující aproximace této závislosti polynomem druhého stupně [2]:

$$\varepsilon(\Delta t) = a + b\Delta t + c\Delta t^2 \quad (5)$$

kde a , b , c jsou konstanty.

V případě, že kalibrujeme termočlánek pomocí dvou měření s různými rozdíly teplot, je vhodné volit $a = 0$ V (předpoklad, že při nulovém rozdílu teplot obou konců je nulové i napětí mezi nimi). Označíme-li pro $i \in \{1; 2\}$, určující číslo měření:

Δt_i ... rozdíl teplot mezi konci teploměru

ε_i napětí mezi konci teploměru

lze zbývající koeficienty b , c určit:

$$b = \frac{\varepsilon_1 \Delta t_2^2 - \varepsilon_2 \Delta t_1^2}{\Delta t_1 \Delta t_2^2 - \Delta t_2 \Delta t_1^2} \quad (6)$$

$$c = \frac{\Delta t_1 \varepsilon_2 - \Delta t_2 \varepsilon_1}{\Delta t_1 \Delta t_2^2 - \Delta t_2 \Delta t_1^2} \quad (7)$$

Teplota varu vody

Závislost teploty varu vody t_2 na atmosférickém tlaku p lze v okolí normálního tlaku aproximovat [3]:

$$t_2 = \alpha_0 + \alpha_1 \left(\frac{p}{p_0} - 1 \right) + \alpha_2 \left(\frac{p}{p_0} - 1 \right)^2 + \alpha_3 \left(\frac{p}{p_0} - 1 \right)^3 \quad (8)$$

kde

$$\alpha_0 = 100,0^\circ \text{C}$$

$$\alpha_1 = 28,0216^\circ \text{C}$$

$$\alpha_2 = 11,642^\circ \text{C}$$

$$\alpha_3 = 7,1^\circ \text{C}$$

$$p_0 = 1,01325 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

Postup měření

Označím

t_1 teplota tání vody

t_2 teplota varu vody

t_3 teplota tuhnutí cínu

R_1 odpor odporového teploměru při teplotě tání vody

R_2 odpor odporového teploměru při teplotě varu vody

R_3 odpor odporového teploměru při teplotě tuhnutí cínu

Δt_1 ... $t_2 - t_1$

Δt_2 ... $t_3 - t_1$

ε_1 napětí mezi konci termočlánku pro teplotu varu vody / teplotu tání vody

ε_2 napětí mezi konci termočlánku pro teplotu tuhnutí cínu / teplotu tání vody

p atmosférický tlak

Konstanty R_0 , a , b jsem změřil podle (2) – (4). Konstantu a jsem určil na základě úvahy uvedené v části *teorie* rovnou nule. Konstanty b , c jsem změřil podle (6) – (7).

Měření s odporovým teploměrem a s termočlánkem jsem prováděl najednou. Do termosky jsem nasypal podrcený led a vložil jeden konec termočlánku měď/konstantan a platinový odporový teploměr. Odporový teploměr jsem připojil k multimetru, jímž jsem měřil jeho odpor, konce termočlánku k zapisovači, jímž jsem měřil napětí mezi nimi (předtím jsem nastavil vhodný rozsah zapisovače, zapisovač zkalibroval pro nulové napětí a spustil záznam). Přesvědčil jsem se, že led taje a že se odpor odporového teploměru ustálil; hodnotu odporu jsem odečetl (R_1). Odporový teploměr a druhý konec termočlánku jsem vložil do nádoby s vodou, kterou jsem následně začal ohřívat. V okamžiku, kdy termočlánek vykazoval konstantní napětí, jsem odečetl hodnotu odporu odporového teploměru (R_2) (tato hodnota se po dobu zapisovačem ukazovaného konstantního napětí neměnila). Podobným postupem jsem změřil veličiny vztažené k teplotě tuhnutí cínu; cín jsem zahříval pískou nad teplotu tání a následně ho nechal chladnout. Odečítal jsem hodnoty odporu odporového teploměru v úseku, kdy zapisovač udával konstantní napětí; teplotu tuhnutí cínu jsem určil v místě, kdy se odpor nejméně měnil s časem.

Teplotu tání vody jsem určil podle [4], teplotu varu vody jsem změřil podle (8), jako teplotu tuhnutí cínu jsem použil teplotu tuhnutí za normálního tlaku (referenční bod mezinárodní teplotní stupnice ITS-90), uvedenou v [4].

Atmosférický tlak jsem změřil digitálním barometrem.

Výsledky měření

Přesnost přístrojů

digitální multimetr: $5 \cdot 10^{-3}$ — relativní chyba (při použitém rozsahu)

digitální barometr: $2 \cdot 10^2$ Pa

zapisovač: $(\frac{2}{3})^{1/2}$ -násobek dílku zapisovacího papíru

Ostatní pomůcky

pícka s cinem, nádoba na vodu, topné hnízdo, termoska na led, led, hmoždír k drcení ledu, kleště

Podmínky měření

místo: Praha, Ke Karlovu 3

čas: 23.4.2008

teplota vzduchu: 295,7 K

atmosférický tlak: $(9,90 \pm 0,02) \cdot 10^4$ Pa

vlhkost vzduchu: 37,4%

Atmosférický tlak

$p = 9,90 \cdot 10^4$ Pa

přístroj: digitální barometr

přesnost přístroje: $\Delta[p] = 2 \cdot 10^2$ Pa

chyba měření: $\varepsilon[p] = \Delta[p]$ (statistická chyba je malá ve srovnání s přesností přístroje)

výsledek měření: $p = (9,90 \pm 0,02) \cdot 10^4$ Pa

Teplota varu vody

t_2 změřím podle (8)

Chybu měření určím podle zákona šíření chyb [2, str. 44, (3,43)], přičemž hodnoty konstant v (8) budu považovat za neomezeně přesné.

$t_2 = (9,936 \pm 0,005) \cdot 10^1$ °C

Teplota tání vody

$t_1 = (0 \pm 1) \cdot 10^{-2}$ °C

(tabelovaná hodnota platí pro chemicky čistou vodu, zatímco použitá voda může obsahovat příměsi)

zdroj: [4]

Teplota tuhnutí cínu

$t_3 = (2,3193 \pm 0,0001) \cdot 10^2$ °C (tabelovaná hodnota platí pro normální tlak)

zdroj: [4]

Odpor odporového teploměru při teplotě tání vody

$R_1 = 100,4$ Pa

přístroj: digitální multimetr

přesnost přístroje: $\Delta[R_1] = 5 \cdot 10^{-3} \mu[R_1]$

chyba měření: $\varepsilon[R_1] = \Delta[R_1]$ (statistická chyba je malá ve srovnání s přesností přístroje)

výsledek měření: $R_1 = (1,004 \pm 0,005) \cdot 10^2$ Ω

Odpor odporového teploměru při teplotě varu vody

$R_2 = 138,6$ Pa

přístroj: digitální multimetr

přesnost přístroje: $\Delta[R_2] = 5 \cdot 10^{-3} \mu[R_2]$

chyba měření: $\varepsilon[R_2] = \Delta[R_2]$ (statistická chyba je malá ve srovnání s přesností přístroje)

výsledek měření: $R_2 = (1,386 \pm 0,007) \cdot 10^2$ Ω

Odpor odporového teploměru při teplotě tuhnutí cínu

$R_3 = 187,4$ Pa

přístroj: digitální multimetr

přesnost přístroje: $\Delta[R_3] = 5 \cdot 10^{-3} \mu[R_3]$

chyba měření: $\varepsilon[R_3] = \Delta[R_3]$ (statistická chyba je malá ve srovnání s přesností přístroje)

výsledek měření: $R_3 = (1,874 \pm 0,009) \cdot 10^2$ Ω

Kalibrační konstanty odporového teploměru

R_0 změřím podle (2), A změřím podle (3), B změřím podle (4).

Chyby měření určím podle zákona šíření chyb [2, str. 44, (3,43)].

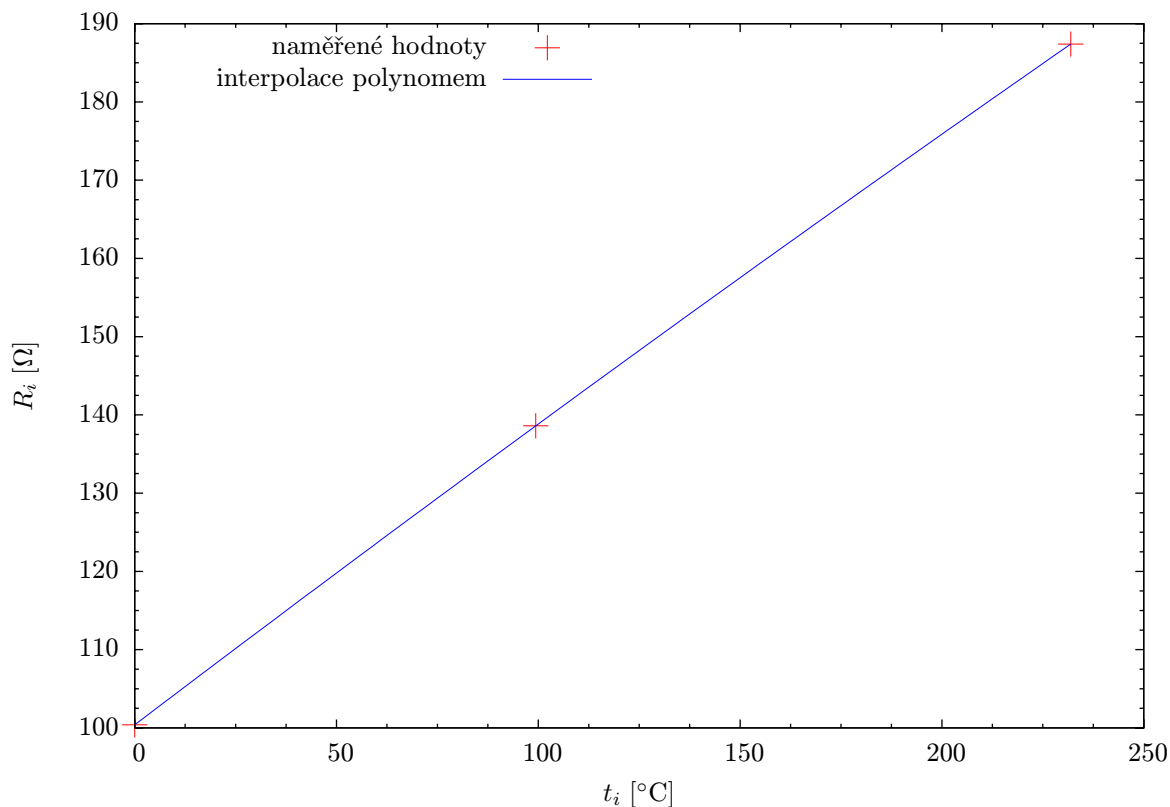
$$R_0 = (1,004 \pm 0,005) \cdot 10^2 \, \Omega$$

$$A = (3,9 \pm 0,2) \cdot 10^{-3} \, (^\circ\text{C})^{-1}$$

$$B = (-7 \pm 6) \cdot 10^{-7} \, (^\circ\text{C})^{-2}$$

Kalibrační křivka odporového teploměru

Graf 1: Závislost odporu odporového teploměru na teplotě

**Rozdíl mezi teplotou varu vody a teplotou tání vody**

Δt_1 změřím podle: $\Delta t_1 = t_2 - t_1$ (definiční rovnice)

Chybu měření určím podle zákona šíření chyb [2, str. 44, (3,43)].

$$\Delta t_1 = (9,936 \pm 0,006) \cdot 10^1 \, \text{K}$$

Rozdíl mezi teplotou tuhnutí cínu a teplotou tání vody

Δt_2 změřím podle: $\Delta t_2 = t_3 - t_1$ (definiční rovnice)

Chybu měření určím podle zákona šíření chyb [2, str. 44, (3,43)].

$$\Delta t_2 = (2,3193 \pm 0,0001) \cdot 10^2 \, \text{K}$$

Napětí mezi konci termočlánku pro teplotu varu vody / teplotu tání vody

$$\varepsilon_1 = 4,275 \cdot 10^{-3} \, \text{V}$$

přístroj: zapisovač

přesnost přístroje: $\Delta[\varepsilon_1] = 4 \cdot 10^{-5} \, \text{V}$ (použitý rozsah: 5 mV)

chyba měření: $\varepsilon[\varepsilon_1] = \Delta[\varepsilon_1]$

výsledek měření: $\varepsilon_1 = (4,28 \pm 0,04) \cdot 10^{-3} \, \text{V}$

Napětí mezi konci termočládku pro teplotu tuhnutí cínu / teplotu tání vody

$$\varepsilon_2 = 1,09 \cdot 10^{-2} \text{ V}$$

přístroj: zapisovač

přesnost přístroje: $\Delta[\varepsilon_2] = 2 \cdot 10^{-4} \text{ V}$ (použitý rozsah: 20 mV)

chyba měření: $\varepsilon[\varepsilon_2] = \Delta[\varepsilon_2]$

výsledek měření: $\varepsilon_2 = (1,09 \pm 0,02) \cdot 10^{-2} \text{ V}$

Kalibrační konstanty termočládku

a určím na základě úvahy v části *teorie*, b změřím podle (6), c změřím podle (7)

Chyby měření určím podle zákona šíření chyb [2, str. 44, (3,43)].

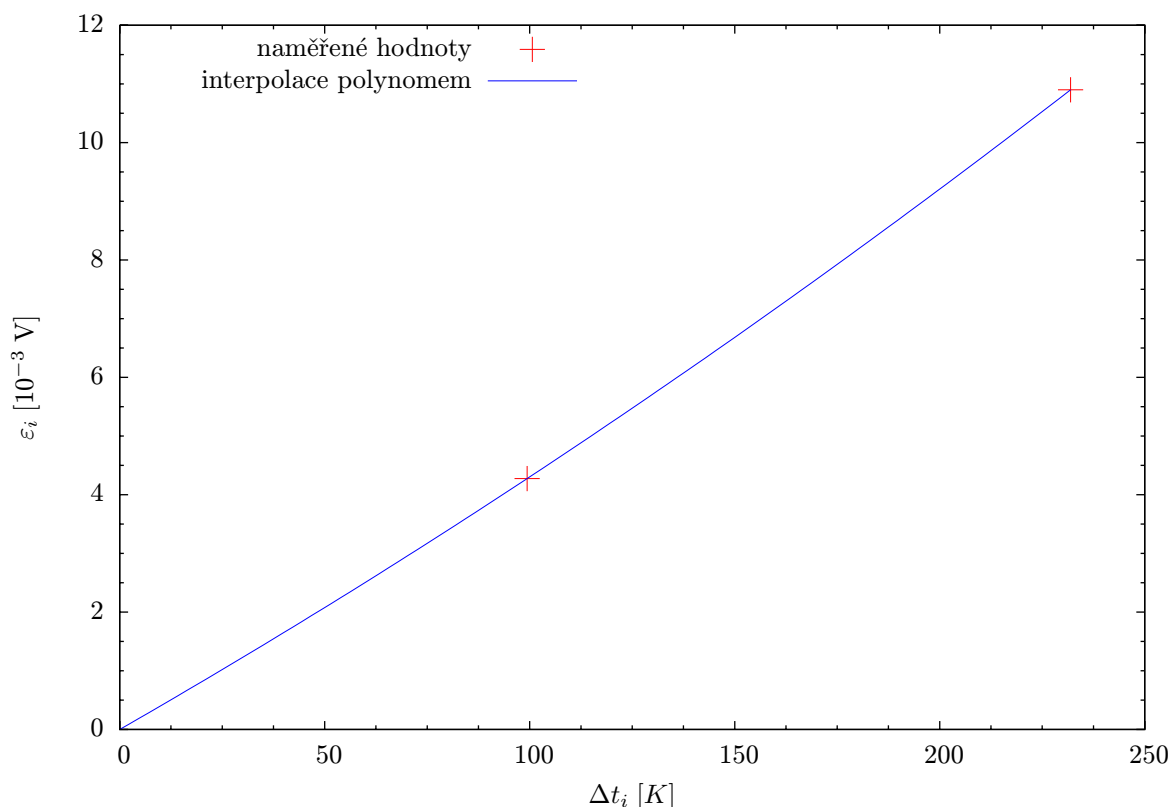
$$a = (0 \pm 0) \text{ V}$$

$$b = (4,00 \pm 0,10) \cdot 10^{-5} \text{ V} \cdot \text{K}^{-1}$$

$$c = (3,0 \pm 0,7) \cdot 10^{-8} \text{ V} \cdot \text{K}^{-2}$$

Kalibrační křivka termočládku

Graf 2: Závislost napětí mezi konci termočládku na teplotě

**Diskuse**

Běžné hodnoty kalibračních konstant A , B platinového odporového teploměru jsou $A = 3,81 \cdot 10^{-3} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$, $B = -6,02 \cdot 10^{-7} \text{ }^\circ\text{C}^{-2}$ [5]. Tyto hodnoty se v rámci chyby shodují s naměřenými hodnotami.

Běžné hodnoty konstant a , b , c termočládků měď-konstantan pro teplotní interval $0 \text{ }^\circ\text{C} - 400 \text{ }^\circ\text{C}$ jsou $a = 0 \text{ V}$, $b = 3,875 \cdot 10^{-5} \text{ V} \cdot \text{K}^{-1}$, $c = 3,33 \cdot 10^{-8} \text{ V} \cdot \text{K}^{-2}$ [6]. Naměřená hodnota konstanty b je mírně větší, což ovšem může být způsobeno zanedbáním dalších šesti členů polynomu uvedeného v [6].

Proto raději srovnám přímo hodnoty napětí: [6] uvádí, že napětí na termočládku měď-konstantan na zmíněném teplotním intervalu pro rozdíl teplot $99 \text{ }^\circ\text{C}$ je $4,232 \cdot 10^{-3} \text{ V}$ a pro rozdíl teplot $231 \text{ }^\circ\text{C}$ je $1,096 \cdot 10^{-2} \text{ V}$. Ve druhém případě se hodnoty shodují v rámci chyb, zatímco v prvním (tj. tání ledu / var vody) nikoliv — naměřená hodnota je větší než tabelovaná. To může být zčásti způsobeno případnými příměsmi v použité vodě. Zaujalo mě však, že napětí na daném termočládku při teplotním rozdílu $100 \text{ }^\circ\text{C}$, jenž by v diskutovaném případě odpovídal normálnímu atmosférickému tlaku, udávané

[6] — tedy $4,279 \cdot 10^{-3}$ V —, se velmi shoduje s naměřenou hodnotou $4,275 \cdot 10^{-3}$ V. V souvislosti s touto skutečností bych proto navrhnul při dalším měření použít i jiné měřidlo tlaku za účelem vyloučení příliš velké chyby použitého barometru.

V případě odporového teploměru je relativní chyba koeficientu 3. členu interpolačního polynomu velmi velká. Naopak v případě termočlánku považuji za pravděpodobné, že měření dalšího teplotního bodu by nezanedbatelně zpřesnilo křivku uvnitř vyšetřovaného intervalu.

Dalšími zdroji chyb by mohly být možné příměsi v použitém cínu, zmíněné možné příměsi ve vodě a skutečnost, že použité hodnoty teploty tání ledu a teploty tuhnutí cínu jsou určeny při jiné hodnotě atmosférického tlaku, než při které bylo prováděno měření.

Na grafech je vidět, že křivka teplotní závislosti odporu odporového teploměru je přibližně lineární a křivka teplotní závislosti napětí mezi konci termočlánku je mírně konvexní.

Vzhledem k velkým chybám koeficientů prokládajícího polynomu jsem uvážil za nevhodné provádět extrapolaci teplotní závislosti odporu odporového teploměru, a prokládající křivka je zakreslena jenom v mezích měřených bodů. Ze stejného důvodu a vzhledem k tomu, že neznám tvar funkční závislosti napětí na termočlánku, neprovádím extrapolaci ani kalibrační křivky termočlánku.

Závěr

Pomocí bodu tání vody, bodu varu vody a bodu tuhnutí cínu jsem okalibroval platinový odporový teploměr:

$$R(t) = R_0 \cdot (1 + At + Bt^2)$$

kde

$$\begin{aligned} R_0 &= (1,004 \pm 0,005) \cdot 10^2 \, \Omega \\ A &= (3,9 \pm 0,2) \cdot 10^{-3} \, (^{\circ}\text{C})^{-1} \\ B &= (-7 \pm 6) \cdot 10^{-7} \, (^{\circ}\text{C})^{-2} \end{aligned}$$

a termočlánek měď-konstantan:

$$\varepsilon(\Delta t) = a + b\Delta t + c\Delta t^2$$

kde

$$\begin{aligned} a &= (0 \pm 0) \, \text{V} \\ b &= (4,00 \pm 0,10) \cdot 10^{-5} \, \text{V} \cdot \text{K}^{-1} \\ c &= (3,0 \pm 0,7) \cdot 10^{-8} \, \text{V} \cdot \text{K}^{-2} \end{aligned}$$

Zapisovačem jsem registroval teplotní průběh termoelektrického napětí mezi konci termočlánku při ohřevu vody a varu vody a při tuhnutí cínu. Záznam ze zapisovače je přiložen k referátu.

Kalibrační křivka odporového teploměru je zakreslena v *grafu 1*, kalibrační křivka termočlánku je zakreslena v *grafu 2*.

Reference

- [1] HOFMANN, Dietrich. *Handbook of Measuring System Design, Metallic Resistance Temperature Detectors (RTDs)*. Wiley Publishers, 2005.
- [2] BROŽ, Jaromír. *Základy fyzikálních měření (I)*. 1. vydání. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, n. p., 1967.
- [3] BROŽ, Jaromír. *Základy fyzikálních měření (I)*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, n. p., 1983.
- [4] MIKULČÁK, Jiří. *Matematické, fyzikální a chemické tabulky a vzorce pro střední školy*. 1. vydání. Praha: Prometheus, spol. s r. o., 2005. ISBN 80-7196-264-3.
- [5] Honeywell Sensing and Control. *Reference and application data, Temperature sensors, Platinum RTDs* <http://content.honeywell.com/sensing/prodinfo/temperature/technical/c15_136.pdf> získáno 29.4.2008.
- [6] NIST ITS-90 Thermocouple Database <<http://srdata.nist.gov/its90/main/>> získáno 29.4.2008.