

## Úkol

### Pracovní úkol

1. Změřte modul pružnosti v tahu  $E$  oceli z protažení drátu.
2. Změřte modul pružnosti v tahu  $E$  oceli a duralu nebo mosazi z průhybu trámku.
3. Výsledky měření graficky znázorněte, modul pružnosti určete užitím lineární regrese.

### Klíčová slova

Hookův zákon, modul pružnosti

### Pokyny k měření

1. Při měření protažení drátu i průhybu trámku závaží na miskách nejprve postupně přidávejte a poté, po dosažení nejvyššího zatížení, odebírejte.

## Teorie

Proměnná  $i$  probíhá hodnoty 0, m, odpovídající významům: ocelový trámek, mosazný trámek. Proměnná  $j$  značí číslo jednotlivého měření.

Deformaci pružného tělesa ve směru působící síly popisuje Hookův zákon [1]:

$$\frac{\Delta h}{h} = \frac{\sigma}{E} \quad (1)$$

kde

$\sigma$  ..... působící napětí  
 $h$  ..... původní rozměr tělesa ve směru působící síly  
 $\Delta h$  ... prodloužení tělesa ve směru působící síly  
 $E$  ..... Youngův modul pružnosti tělesa

### Měření modulu pružnosti z prodloužení drátu

Hookův zákon lze přímo aplikovat na prodloužení zatíženého drátu:

$$E_d = \frac{m_{d,j} g h_j}{\pi r_d^2 \Delta h_j} \quad (2)$$

kde

$E_d$  ..... Youngův modul pružnosti drátu  
 $g$  ..... tíhové zrychlení  
 $h_j$  ..... původní délka úseku drátu  
 $m_{d,j}$  ... hmotnost závaží, kterým je drát zatížen  
 $r_d$  ..... poloměr drátu  
 $\Delta h_j$  ... prodloužení úseku drátu

Drát je na jednom konci upevněn a je veden ke kladce, za něj je na něj zavěšeno závaží. Ke kladce je připevněno rovinné zrcátko tak, že osa kladky prochází plochou zrcátka ve více než jednom bodě. Přes zrcátko pozorujeme dalekohledem, o kterém lze předpokládat, že je upevněn ve stejné výšce jako zrcátko, svislou stupnicí (číslovanou odspoda) umístěnou vedle dalekohledu.

Odečteme-li pro nějakou polohu kladky dílek stupnice ukazovaný riskou dalekohledu, lze určit úhel  $\varphi_j$  pootočení kladky od polohy, kdy riska ukazuje dílek stupnice ve výšce dalekohledu, z elementárních geometrických úvah:

$$\tan(2\varphi_j) = \frac{n_0 - n_j}{d} \quad (3)$$

kde

$n_0$  .... dílek stupnice ve výšce dalekohledu  
 $n_j$  .... odečtený dílek stupnice  
 $d$  ..... vzdálenost stupnice od osy kladky

Za předpokladu, že drát v kladce neprokluzuje a že tření s kladkou zabraňuje lokálnímu stlačení drátu při jeho ohybu, pro prodloužení  $\Delta h_j$  úseku drátu před kladkou (to je části drátu vedoucí v zatížené poloze od upevnění k prvnímu styčnému bodu s kladkou) dostáváme:

$$\Delta h_j = \frac{r_k}{2} \arctan \frac{n_0 - n_j}{d} - c_{d,1} \quad (4)$$

kde

$r_k$  .... poloměr kladky

$c_{d,1}$  .. konstanta nezávislá na poloze kladky (odpovídá poloze kladky při nulovém zatížení drátu)

Zbývá určit nezatíženou délku  $h_j$  úseku drátu před kladkou. Ta je ale zřejmá

$$h_j = h_0 - \Delta h_j \quad (5)$$

kde

$h_0$  .... vzdálenost mezi upevněním drátu a prvním styčným bodem drátu s kladkou

Dosadíme-li (4) a (5) do (2), získáme za zjednodušujícího předpokladu, že se poloměr drátu při natažení nemění:

$$E_d = \frac{m_{d,j} g}{\pi r_d^2} \left( \frac{2h_0}{r_k \arctan \frac{n_0 - n_j}{d} - 2c_{d,1}} - 1 \right) \quad (6)$$

kde

$r_d$  .... poloměr drátu

První činitel označím  $\sigma_{d,j}$  (je rovný působícímu napětí) a převrácenou hodnotu druhého činitele označím  $\varepsilon_{d,j}$  (je rovná relativnímu prodloužení drátu).

Abychom mohli snadno použít lineární regresi, zavedeme proměnnou  $z_j$  a konstantu  $c_d$ :

$$z_j := \frac{r_k \arctan \frac{n_0 - n_j}{d}}{2h_0} \quad (7)$$

$$c_d := \frac{c_{d,1}}{h_0} \quad (8)$$

Pak lze vztah (6) zapsat:

$$z_j = \frac{1}{\frac{\pi r_d^2 E_d}{g m_{d,j}} + 1} + c_d \quad (9)$$

### Měření modulu pružnosti z průhybu trámku

Zkoumejme průhyb trámku s konstantním, středově symetrickým průřezem kolmým ke spojnicí podpěr zatíženého uprostřed mezi podpěrami. Pro malé průhyby lze z (1) odvodit [2]:

$$y_{i,j} = \frac{F_{i,j} l^3}{48 E_i J_i} \quad (10)$$

kde

$y_{i,j}$  ... průhyb trámku

$F_{i,j}$  .. působící síla

$l$  .... vzdálenost podpěr

$J_i$  .... plošný moment průřezu trámkem kolmého ke spojnicí podpěr vzhledem k vodorovné ose procházející těžištěm průřezu a kolmé na spojnicí podpěr

$E_i$  .... Youngův modul pružnosti trámku

Plošný moment  $J_i$  obdélníku s vodorovným rozměrem  $a_i$  a svislým rozměrem  $b_i$  vzhledem k vodorovné ose procházející těžištěm je

$$J_i = a_i \int_{-\frac{b_i}{2}}^{\frac{b_i}{2}} x^2 dx = \frac{a_i b_i^3}{12} \quad (11)$$

Sledujeme-li průhyb trámku, na kterém je navlečena stupnice číslovaná odshora, mikroskopem, je rozdíl dvou průhybů rovný rozdílu odečtených hodnot stupnice:

$$y_{i,j} = p_{i,j} - c_{i,1} \quad (12)$$

kde

$p_{i,j}$  ... odečtený dílek stupnice

$c_{i,1}$  ... konstanta nezávislá na průhybu trámku (odpovídá dílku stupnice ukazovanému při nulovém zatížení)

Tedy pro průhyb trámku obdélníkového průřezu získáme po dosazení (11) a (12) do (10):

$$p_{i,j} = \frac{1}{4} \frac{gl^3}{a_i b_i^3 E_i} (m_{i,j} + m_{i,0}) + c_{i,1} \quad (13)$$

kde

$m_{i,0}$  ... hmotnost první (konstantní) části závaží (miska, ...)

$m_{i,j}$  ... hmotnost druhé (proměnné) části závaží

$a_i$  ..... šířka trámku

$b_i$  ..... výška trámku

Konstanty  $c_{i,1}$  a  $m_{i,0}$  spojíme do jedné:

$$c_i := \frac{1}{4} \frac{gl^3}{a_i b_i^3 E_i} m_{i,0} + c_{i,1} \quad (14)$$

Pak lze (13) zapsat:

$$p_{i,j} = \frac{1}{4} \frac{gl^3}{a_i b_i^3 E_i} m_{i,j} + c_i \quad (15)$$

## Postup měření

### Youngův modul pružnosti oceli z prodloužení drátu

Veličinu  $r_d^2 E_d$  jsem změřil spolu s konstantou  $c_d$  metodou nejmenších čtverců podle (9). Youngův modul pružnosti oceli z prodloužení drátu jsem změřil z naměřené hodnoty  $r_d^2 E_d$ .

Použil jsem aparaturu popsanou v části *teorie*; od upevnění byl drát veden ke kladce vodorovně. Závaží představovalo misku, do které jsem vložil 1kg závaží a poté postupně přidával a následně odebíral další závaží, přičemž jsem průběžně odečítal dílek stupnice ukazovaný riskou dalekohledu.

Průměr kladky jsem měřil v různých směrech posuvným měřidlem. Průměr drátu jsem změřil mikrometrem. Vzdálenost mezi upevněním drátu a prvním styčným bodem drátu s kladkou jsem změřil pásovým měřidlem; polohu upevnění drátu a prvního styčného bodu drátu s kladkou jsem určoval odhadem, což vedlo k vyšší chybě měření. Dílek stupnice ve výšce dalekohledu jsem určil odhadem. Vzdálenost stupnice od osy kladky jsem změřil pásovým měřidlem; vodorovný směr jsem určil odhadem. Hmotnosti závaží kladených na misku jsem stanovil z udávané hodnoty. Jako tíhové zrychlení jsem použil tabelovanou hodnotu.

### Měření modulu pružnosti z průhybu trámku

Veličinu  $gl^3/(a_i b_i^3 E_i)$  jsem změřil spolu s konstantou  $c_i$  lineární regresí podle (15). Youngův modul pružnosti oceli, resp. mosazi z průhybu trámku jsem změřil z naměřené hodnoty  $gl^3/(a_i b_i^3 E_i)$ .

Ocelový, resp. mosazný trámek jsem položil na dvě podpěry, které byly ve stejné výšce. Na trámek jsem uprostřed zavěsil misku a navléknul stupnici (na kterou byl nasměrován mikroskop). Do misky jsem postupně přidával a v případě ocelového trámku následně odebíral další závaží, přičemž jsem průběžně odečítal dílek stupnice ukazovaný riskou mikroskopu. Při měření modulu pružnosti mosazi z průhybu trámku jsem z důvodu omezenosti sady závaží musel závaží na misce často všechna vyměnit.

Vzdálenost podpěr jsem změřil pásovým měřidlem. Výšku a šířku trámku jsem změřil mikrometrem. Hmotnosti závaží kladených na misku jsem stanovil z udávané hodnoty. Jako tíhové zrychlení jsem použil tabelovanou hodnotu.

## Výsledky měření

### Podmínky měření

místo:	Praha, Ke Karlovu 3
čas:	28.3.2008
teplota vzduchu:	23,9 °C
atmosférický tlak:	98,55 kPa
vlhkost vzduchu:	32,5%

**Přesnost přístrojů**

stupnice vedle dalekohledu:	$10^{-3}$ m
návlečná stupnice:	$10^{-4}$ m
mikrometr:	$10^{-5}$ m
posuvné měřidlo:	$5 \cdot 10^{-5}$ m
pásové měřidlo:	$10^{-3}$ m

**Ostatní pomůcky**

sada závaží (0,1 kg, 0,5 kg, 1 kg, 2 kg), sada závaží (1 g, 5 g, 10 g, 20 g, 30 g, 50 g, 100 g, 500 g, 1000 g), ocelový drát, na jednom konci připevněný, vedený rovnoběžně přes kladku, 2 misky na závaží, dalekohled, ocelový a mosazný trámek, mikroskop

**Tíhové zrychlení v Praze**

$g = 9,810 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$  (budu považovat za neomezeně přesné)

zdroj: [3]

**Poloměr kladky**

Tab. 1: Průměr kladky

č.m.	1	2	3	4	5	6	7
$2r_k$ [mm]	39,00	38,60	38,60	38,65	38,50	38,60	38,55

přístroj:	posuvné měřidlo
přesnost přístroje:	$\Delta[2r_k] = 0,05 \text{ mm}$
standardní odchylka:	$\sigma[2r_k] = 0,06 \text{ mm}$
krajní statistická chyba:	$3\sigma[2r_k]$
chyba měření:	$\varepsilon[2r_k] = \sqrt{\Delta[2r_k]^2 + (3\sigma[2r_k])^2}$
očekávaná hodnota:	aritmetický průměr hodnot ze souboru
výsledek měření:	$r_k = (1,93 \pm 0,01) \cdot 10^{-2} \text{ m}$

**Poloměr drátu**

Tab. 2: Průměr drátu

č.m.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$2r_d$ [mm]	0,510	0,505	0,510	0,510	0,515	0,505	0,510	0,505	0,505	0,510

přístroj:	mikrometr
přesnost přístroje:	$\Delta[2r_d] = 0,01 \text{ mm}$
standardní odchylka:	$\sigma[2r_d] = 0,001 \text{ mm}$
krajní statistická chyba:	$3\sigma[2r_d]$
chyba měření:	$\varepsilon[2r_d] = \sqrt{\Delta[2r_d]^2 + (3\sigma[2r_d])^2}$
očekávaná hodnota:	aritmetický průměr hodnot ze souboru
výsledek měření:	$r_d = (2,54 \pm 0,05) \cdot 10^{-4} \text{ m}$

**Vzdálenost mezi upevněním drátu a jeho prvním styčným bodem s kladkou**

$h_0 = 1144,0 \text{ mm}$

přístroj:	pásové měřidlo
přesnost přístroje:	$\Delta[h_0] = 1,0 \text{ mm}$
chyba měření:	$\varepsilon[h_0] = 2,2 \text{ mm}$
	(určeno jako kvadratický součet přesnosti přístroje a přesnosti experimentátora 2 mm (nepřesnost určení krajních poloh))
výsledek měření:	$h_0 = (1,144 \pm 0,002) \text{ m}$

**Vzdálenost stupnice od osy kladky**

$d = 942,5 \text{ mm}$

přístroj:	pásové měřidlo
přesnost přístroje:	$\Delta[d] = 1,0 \text{ mm}$
chyba měření:	$\varepsilon[d] = \Delta[d]$ (statistická chyba je malá ve srovnání s přesností přístroje)
výsledek měření:	$d = (9,425 \pm 0,010) \cdot 10^{-1} \text{ m}$

**Dílek stupnice ve výšce dalekohledu**

$$n_0 = 21 \text{ cm}$$

přesnost odhadu:  $\Delta[n_0] = 1,0 \text{ cm}$

chyba měření:  $\varepsilon[n_0] = \Delta[n_0]$  (statistická chyba je malá ve srovnání s přesností odhadu)

výsledek měření:  $n_0 = (2,1 \pm 0,1) \cdot 10^{-1} \text{ m}$

**Závislost  $z_j$  na hmotnosti závaží zatěžujícího drát**

vztahy:  $z_j \dots$  změřeno podle definiční rovnice (7)

přístroje: stupnice vedle dalekohledu

přesnosti přístrojů:  $\Delta[n_j] = 10^{-3} \text{ m}$

chyby měření:  $\varepsilon[m_{d,j}] \dots$  považováno za neomezeně přesné

$$\varepsilon[n_j] = \Delta[n_j]$$

$\varepsilon[z_j] \dots$  podle zákona šíření chyb [2, str. 44, (3,43)]

Tab. 3: Závislost  $z_j$  na hmotnosti závaží zatěžujícího drát

č.m.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$m_{d,j} [\text{kg}]$	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0	2,1	2,2	2,3	2,4
$n_j [10^{-4} \text{ m}]$	1695	1670	1640	1615	1585	1555	1530	1500	1470	1445	1415	1385	1360	1330	1300
$z_j [10^{-4}]$	3,63	3,85	4,12	4,34	4,61	4,88	5,10	5,37	5,64	5,86	6,13	6,39	6,62	6,88	7,15
$\varepsilon[z_j] [10^{-4}]$	0,09	0,09	0,09	0,09	0,09	0,09	0,09	0,09	0,09	0,09	0,09	0,09	0,09	0,09	0,09

č.m.	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
$m_{d,j} [\text{kg}]$	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8
$n_j [10^{-4} \text{ m}]$	1270	1245	1220	1190	1165	1135	1110	1080	1055	1025	995	970	945	910
$z_j [10^{-4}]$	7,42	7,64	7,86	8,13	8,35	8,62	8,84	9,10	9,32	9,59	9,86	10,08	10,30	10,61
$\varepsilon[z_j] [10^{-4}]$	0,09	0,09	0,09	0,09	0,09	0,09	0,09	0,09	0,09	0,09	0,09	0,09	0,09	0,09

č.m.	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43
$m_{d,j} [\text{kg}]$	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0	2,1	2,2	2,3
$n_j [10^{-4} \text{ m}]$	1690	1660	1635	1605	1575	1550	1520	1490	1465	1440	1410	1380	1350	1320
$z_j [10^{-4}]$	3,67	3,94	4,16	4,43	4,70	4,92	5,19	5,46	5,68	5,90	6,17	6,44	6,71	6,97
$\varepsilon[z_j] [10^{-4}]$	0,09	0,09	0,09	0,09	0,09	0,09	0,09	0,09	0,09	0,09	0,09	0,09	0,09	0,09

č.m.	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57
$m_{d,j} [\text{kg}]$	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7
$n_j [10^{-4} \text{ m}]$	1295	1270	1240	1210	1180	1155	1130	1100	1075	1050	1020	990	975	935
$z_j [10^{-4}]$	7,20	7,42	7,68	7,95	8,22	8,44	8,66	8,93	9,15	9,37	9,63	9,90	10,03	10,39
$\varepsilon[z_j] [10^{-4}]$	0,09	0,09	0,09	0,09	0,09	0,09	0,09	0,09	0,09	0,09	0,09	0,09	0,09	0,09

Měření č. 1 – 29 bylo prováděno v průběhu zatěžování drátu, měření č. 30 – 57 v průběhu jeho odlehčování.

Výsledné hodnoty parametrů fitu funkce (9):

$$r_d^2 E_d = (1,257 \pm 0,010) \cdot 10^4 \text{ N}$$

$$c_d = (1,181 \pm 0,050) \cdot 10^{-4}$$

(Uvádím krajní statistickou chybu, rovnou trojnásobku standardní odchylky.)

**Youngův modul pružnosti oceli z prodloužení drátu**

$E_d$  změřím (s použitím hodnot parametru fitu funkce (9)) podle

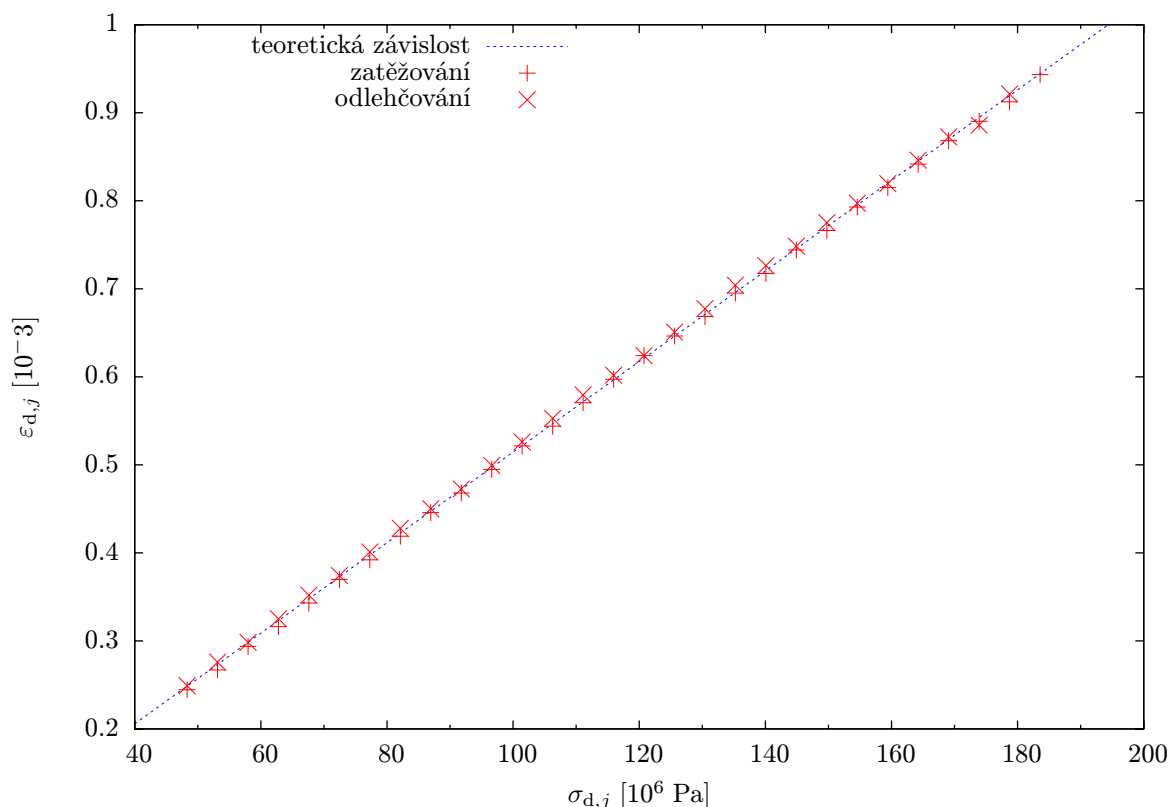
$$E_d = \frac{r_d^2 E_d}{r_d^2}$$

Chybu měření určím podle zákona šíření chyb [2, str. 44, (3,43)].

$$E_d = (1,94 \pm 0,08) \cdot 10^{11} \text{ Pa}$$

**Grafické znázornění závislosti relativního prodloužení drátu na napětí**

Graf 1: Závislost relativního prodloužení ocelového drátu na napětí

**Závislosti  $p_{i,j}$  na hmotnosti proměnné části závaží zatěžujícího trámek**

přístroje: návlečná stupnice  
 přesnosti přístrojů:  $\Delta[p_{i,j}] = 10^{-4}$  m  
 chyby měření:  $\varepsilon[m_{i,j}] \dots$  považováno za neomezeně přesné  
 $\varepsilon[p_{i,j}] = \Delta[p_{i,j}]$

Tab. 4: Závislost  $p_{o,j}$  na hmotnosti proměnné části závaží zatěžujícího ocelový trámek

č.m.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$m_{o,j}$ [kg]	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$p_{o,j}$ [ $10^{-5}$ m]	370	395	420	450	475	500	530	560	580	610

č.m.	11	12	13	14	15	16	17	18	19
$m_{o,j}$ [kg]	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$p_{o,j}$ [ $10^{-5}$ m]	370	390	420	450	475	500	530	555	580

Měření č. 1 – 10 bylo prováděno v průběhu zatěžování drátu, měření č. 11 – 19 v průběhu jeho odlehčování.

Tab. 5: Závislost  $p_{m,j}$  na hmotnosti proměnné části závaží zatěžujícího mosazný trámek

č.m.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$m_{m,j}$ [g]	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65
$p_{m,j}$ [ $10^{-5}$ m]	760	770	780	790	800	810	820	825	835	845	850	860	870	880

č.m.	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
$m_{m,j}$ [g]	70	75	80	85	90	95	100	105	110	115	120	125	130
$p_{m,j}$ [ $10^{-5}$ m]	890	900	910	920	925	935	945	950	960	970	980	990	995

Výsledné hodnoty parametrů fitu funkce (15):

$$\frac{gl^3}{a_o b_o^3 E_o} = (1,072 \pm 0,022) \cdot 10^{-2} \text{ m} \cdot \text{kg}^{-1}$$

$$c_o = (3,679 \pm 0,028) \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$\frac{gl^3}{a_m b_m^3 E_m} = (7,24 \pm 0,11) \cdot 10^{-2} \text{ m} \cdot \text{kg}^{-1}$$

$$c_m = (7,626 \pm 0,021) \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

(Uvádím krajní statistickou chybu, rovnou trojnásobku standardní odchylky.)

### Vzdálenost podpěr trámů

$$l = 410 \text{ mm}$$

přístroj: pásové měřidlo

přesnost přístroje:  $\Delta[l] = 1 \text{ mm}$

chyba měření:  $\varepsilon[l] = \Delta[l]$  (statistická chyba je malá ve srovnání s přesností přístroje)

výsledek měření:  $l = (4,10 \pm 0,01) \cdot 10^{-1} \text{ m}$

### Šířka trámů

Tab. 6: Šířka ocelového trámku

č.m.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$a_o$ [mm]	11,865	11,870	11,860	11,885	11,855	11,900	11,900	11,885	11,890	11,875	11,880

Tab. 7: Šířka mosazného trámku

č.m.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$a_m$ [mm]	11,875	11,800	11,680	11,825	11,895	11,870	11,820	11,905	11,930	11,920

přístroj: mikrometr

přesnost přístroje:  $\Delta[a_i] = 0,010 \text{ mm}$

standardní odchylky:  $\sigma[a_o] = 0,005 \text{ mm}$

$$\sigma[a_m] = 0,02 \text{ mm}$$

krajní statistická chyba:  $3\sigma[a_i]$

chyba měření:  $\varepsilon[a_i] = \sqrt{\Delta[a_i]^2 + (3\sigma[a_i])^2}$

očekávaná hodnota: aritmetický průměr hodnot ze souboru

výsledek měření:  $a_o = (1,188 \pm 0,002) \cdot 10^{-2} \text{ m}$

$a_m = (1,185 \pm 0,007) \cdot 10^{-2} \text{ m}$

### Výška trámů

Tab. 8: Výška ocelového trámku

č.m.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$b_o$ [mm]	2,980	2,970	2,970	2,970	2,985	2,980	2,975	2,975	2,975

Tab. 9: Výška mosazného trámku

č.m.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$b_m$ [mm]	1,995	1,995	1,985	1,985	1,980	1,990	1,985	1,990	1,985	1,995	1,995	1,995

přístroj: mikrometr

přesnost přístroje:  $\Delta[b_i] = 0,010 \text{ mm}$

standardní odchylky:  $\sigma[b_o] = 0,002 \text{ mm}$

$$\sigma[b_m] = 0,002 \text{ mm}$$

krajní statistická chyba:  $3\sigma[b_i]$

chyba měření:  $\varepsilon[b_i] = \sqrt{\Delta[b_i]^2 + (3\sigma[b_i])^2}$

očekávaná hodnota: aritmetický průměr hodnot ze souboru

výsledek měření:  $b_o = (2,98 \pm 0,01) \cdot 10^{-3} \text{ m}$

$b_m = (1,99 \pm 0,01) \cdot 10^{-3} \text{ m}$

**Youngův modul pružnosti z průhybu trámku**

$E_i$  změřím (s použitím hodnot parametru fitu funkce (15)) podle

$$E_i = \left( \frac{gl^3}{a_i b_i^3 E_i} \right)^{-1} \frac{gl^3}{a_i b_i^3}$$

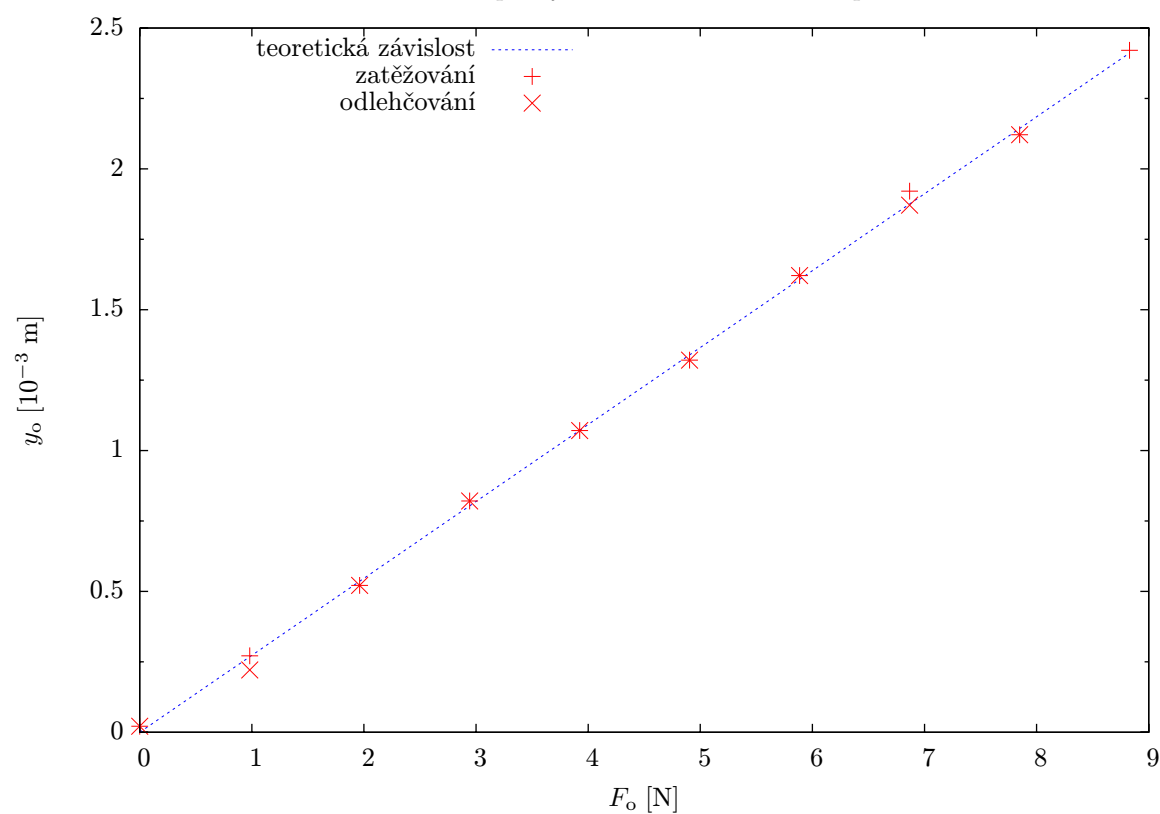
Chybu měření určím podle zákona šíření chyb [2, str. 44, (3,43)].

$$E_o = (2,02 \pm 0,05) \cdot 10^{11} \text{ Pa}$$

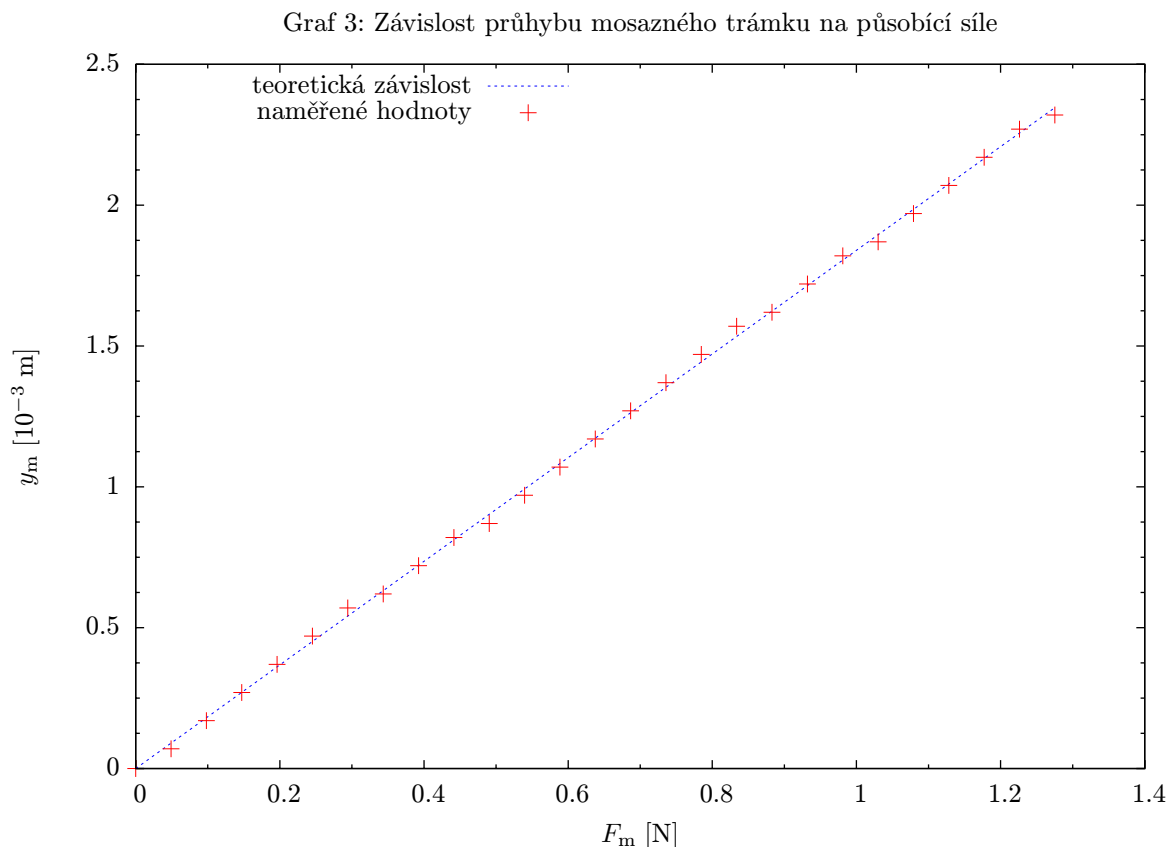
$$E_m = (1,00 \pm 0,02) \cdot 10^{11} \text{ Pa}$$

**Grafické znázornění závislosti průhybu trámku na působící síle**

Graf 2: Závislost průhybu ocelového trámku na působící síle







## Diskuse

[3] udává modul pružnosti oceli  $2,1 \cdot 10^{11}$  Pa a mosazi  $1 \cdot 10^{11}$  Pa. V případě mosazi se hodnoty v rámci chyby shodují. Naměřená hodnota modulu pružnosti oceli je trochu menší než ta udávaná [3], ale to může být způsobeno jiným zastoupením příměsí: [3] zároveň udává rozsah hodnot modulu pružnosti ocelí:  $1,8 \cdot 10^{11}$  Pa –  $2,2 \cdot 10^{11}$  Pa, do kterého obě naměřené hodnoty spadají.

Hodnota modulu pružnosti oceli naměřená pomocí prodloužení drátu je menší než ta naměřená pomocí průhybu trámku. To je možné vysvětlit opět tím, že trámek může mít trochu jiné složení než drát.

Na *grafu 1* je vidět, že použití lineárního zobrazení namísto funkce arctan pro výpočet úhlu pootočení kladky by výsledek téměř neovlivnilo. V případě měření ocelového drátu je vidět, že deformace byly o trochu větší v odlehčovací fázi měření. Tato pomalejší reakce na změnu působící síly poukazuje na jistou nelinearitu chování oceli.

Měření pomocí prodloužení drátu bylo méně přesné než to pomocí průhybu trámku. Největší nepřesnost zde zanášelo měření průměru drátu (ve výsledném vzorci vystupuje ve druhé mocnině). Další nepřesností bylo určení polohy upevnění drátu a prvního styčného body drátu s kladkou; nepřesnost určení těchto pozic přesáhla nepřesnost přístroje.

Naproti tomu měření pomocí průhybu trámku, zvláště v případě mosazi, bylo velmi přesné. Zde je třeba jen dodat, že mosazný trámek má trochu zaoblené hrany, a není tak přesný kvádr, což zvětšuje nepřesnost určení jeho plošného momentu; tato chyba však nemá významný vliv na výsledek.

## Závěr

Metodou prodloužení drátu jsem změřil modul pružnosti oceli:

$$E_d = (1,94 \pm 0,08) \cdot 10^{11} \text{ Pa}$$

Metodou průhybu trámku jsem změřil modul pružnosti oceli:

$$E_o = (2,02 \pm 0,05) \cdot 10^{11} \text{ Pa}$$

a mosazi:

$$E_{\text{m}} = (1,00 \pm 0,02) \cdot 10^{11} \text{ Pa}$$

Závislost relativního prodloužení drátu na napětí je zakreslena v *grafu 1*.

Závislosti průhybu trámek na působící síle jsou zakresleny v *grafech 2 – 3*.

## Reference

- [1] KVASNICA, Jozef. *Mechanika*. 1. vydání. Praha: Academia, 1988.
- [2] BROŽ, Jaromír. *Základy fyzikálních měření (I)*. 1. vydání. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, n. p., 1967.
- [3] MIKULČÁK, Jiří. *Matematické, fyzikální a chemické tabulky a vzorce pro střední školy*. 1. vydání. Praha: Prometheus, spol. s r. o., 2005. ISBN 80-7196-264-3.