

## Úkol

### Pracovní úkol

1. Změřte momenty setrvačnosti kvádrů vzhledem k hlavním osám setrvačnosti.
2. Určete složky jednotkového vektoru ve směru zadané obecné osy rotace kvádrů v souřadné soustavě dané hlavními osami setrvačnosti.
3. Vypočítejte moment setrvačnosti kvádrů vzhledem k zadané obecné ose rotace. Výsledek ověřte měřením.
4. Měrně ověřte Steinerovu větu.

### Klíčová slova

moment setrvačnosti, Steinerova věta, fyzické kyvadlo

### Pokyny k měření

1. Hmotnost tyče a hmotnost válce určujte vážením na laboratorních vahách. Pro měření délek jsou připravena pásová a dotyková měřidla.
2. Měříte-li časové údaje stopkami řízenými síťovou frekvencí 50 Hz, je vhodné zkontrolovat čítačem frekvenci sítě. Liší-li se od 50 Hz, je třeba změřené údaje korigovat.
3. Přiložené těleso považujte za kvádr.

## Teorie

### Hlavní osy setrvačnosti kvádrů

Každá hlavní osa setrvačnosti kvádrů prochází jeho středem a je kolmá na dvě jeho stěny [1].

### Moment setrvačnosti válce vzhledem k jeho ose

Uvažujme válec s poloměrem  $r_v$  a hmotností  $m_v$ .

Jeho moment setrvačnosti  $J_v$  vzhledem k jeho ose je roven [2]:

$$J_v = \frac{1}{2} m_v r_v^2 \quad (1)$$

### Měření momentů setrvačnosti vzhledem k ose procházející těžištěm

Periodu  $T$  torzních kmitů tuhého tělesa, kmitá-li kolem osy procházející těžištěm, lze při malých výchylkách (tj. v intervalu úměrnosti závěsu) vyjádřit jako [3]:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{D}} \quad (2)$$

kde

$J$  ..... moment setrvačnosti tělesa vzhledem k příslušné ose

$D$  .... direkční moment závěsu

Necháme-li kmitat postupně dvě tuhá tělesa na téže závěsu, lze z (2) vyloučit direkční moment a moment setrvačnosti 2. tělesa vyjádřit:

$$J_2 = \frac{T_2^2}{T_1^2} J_1 \quad (3)$$

kde pro  $k \in \{1; 2\}$

$T_k$  .... perioda kmitu  $k$ -tého tělesa

$J_k$  .... moment setrvačnosti  $k$ -tého tělesa vzhledem k příslušné ose

Je-li 1. těleso uvažovaný válec, lze (3) upravit dosazením (1) na tvar:

$$J_2 = \frac{m_v r_v^2 T_2^2}{2 T_1^2} \quad (4)$$

### Souřadnice jednotkového vektoru ve směru zadané osy

Uvažujme kvádr s hranami  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$ . Pro  $k \in \{1; 2; 3\}$  definujeme

$e_k$  .... jednotkový vektor rovnoběžný s  $a_k$

$\{e_1; e_2; e_3\}$  je ortonormální báze daná hlavními osami setrvačnosti uvažovaného kvádru. V této bázi vyjádřím jeden z jednotkových vektorů  $\nu = (\nu_1; \nu_2; \nu_3)$  ve směru osy rovnoběžné s úhlopříčkou stěny určené hranami  $a, b$  tohoto kvádru:

$$\begin{aligned}\nu_1 &= \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} \\ \nu_2 &= \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} \\ \nu_3 &= 0\end{aligned}\tag{5}$$

### Výpočet momentu setrvačnosti vzhledem k ose procházející těžištěm

Moment setrvačnosti  $J_{ku}$  tělesa vzhledem k ose procházející těžištěm a rovnoběžné s  $\nu$  lze vyjádřit pomocí hlavních momentů setrvačnosti  $J_{k_k}$  [1]:

$$J_{ku} = \sum_{k=1}^3 \nu_k^2 J_{k_k}\tag{6}$$

### Ověření Steinerovy věty

Steinerova věta popisuje vztah mezi momentem setrvačnosti  $J_{t,0}$  tělesa s hmotností  $m_t$  vůči nějaké ose procházející těžištěm (říkejme jí *zmíněná osa*) a momentem setrvačnosti  $J_t$  téhož tělesa vůči nějaké ose s ní rovnoběžné (říkejme jí *uvažovaná osa*): je-li vzdálenost těchto os  $d$ :

$$J_{t,0} = J_t + m_t d^2\tag{7}$$

Perioda  $T_{t,k}$  fyzikálního kyvadla tvořeného tímto tělesem, s osou totožnou s *uvažovanou osou*, je rovna [1]:

$$T_{t,k} = 2\pi \sqrt{\frac{J_t}{m_t g d}}\tag{8}$$

Zkombinováním rovnic (7) a (8):

$$J_{t,0} = m_t \left( \frac{g}{4\pi^2} T_{t,k}^2 d - d^2 \right)\tag{9}$$

Všimněme si, že platnost (9) je podmíněna platností Steinerovy věty. Změřím-li moment setrvačnosti vůči *zmíněné ose* podle (9) a také podle (4), měrně tím ověřím Steinerovu větu.

## Postup měření

### Momenty setrvačnosti metodou torzních kmitů

Těleso v úvahách zakončených rovnicemi (7) – (9) představovala tyč. Kvádr, válec a tyč byly opatřeny závity pro upevnění drátu v místech, kterými procházely osy rotace měřené metodou torzních kmitů. Tyč byla opatřena na obou koncích břity, rovnoběžnými se závitem, pro zavěšení jako kyvadla. Pro  $k \in \{1; 2; 3\}$  označím

- $a_1$  .... nejdelší hrana kvádru
- $a_2$  .... hrana kvádru, která není ani nejdelší, ani nejkratší
- $a_3$  .... nejkratší hrana kvádru
- $r_v$  .... poloměr válce
- $m_v$  ... hmotnost válce
- $T_{k_k}$  ... perioda torzních kmitů kvádru kolem hlavní osy setrvačnosti rovnoběžné s hranou  $a_k$
- $J_{k_k}$  ... moment setrvačnosti kvádru vůči hlavní ose setrvačnosti rovnoběžné s hranou  $a_k$
- $T_{ku}$  ... perioda torzních kmitů kvádru kolem osy procházející těžištěm a rovnoběžné s úhlopříčkou stěny určené hranami  $a, b$  (dále jen *zadané obecné ose*)
- $J_{ku}$  ... moment setrvačnosti kvádru vůči zadané obecné ose
- $T_v$  .... perioda torzních kmitů válce kolem jeho osy
- $T_{t,t}$  ... perioda torzních kmitů tyče kolem osy (dále jen *zmíněná osa*) procházející těžištěm a kolmé k ose tyče
- $J_{t,0}$  ... moment setrvačnosti tyče vůči *zmíněné ose*

Hlavní momenty setrvačnosti kvádrů a jeho moment setrvačnosti vzhledem k zadané obecné ose jsem změřil podle (4), uvědomuje si, že zadaná obecná osa prochází těžištěm. Stejným způsobem jsem změřil také moment setrvačnosti tyče vzhledem ke *zmíněné ose*; přitom jsem předpokládal, že závit je v těžišti tyče (pomocí posuvného měřidla jsem zjistil, že závit je od středu tyče posunut přibližně o 1,5 mm).

Kvadr jsem v bodě náležícím požadované ose rotace připevnil šroubkem k drátu připevněnému ke stojanu, nechal uklidnit a vychýlil přibližně o  $90^\circ$ . Stopkami jsem změřil periodu torzních kmitů (resp. její přirozený násobek — za účelem zvýšení přesnosti) (zkontroloval jsem, že frekvence sítě je 50 Hz).

Stejným způsobem jsem změřil periodu torzních kmitů válce kolem jeho osy.

Hmotnost válce jsem změřil na laboratorních vahách. Průměr válce jsem změřil digitálním posuvným měřidlem.

### Jednotkový vektor ve směru zadané obecné osy

Souřadnice jednotkového vektoru ve směru zadané obecné osy v soustavě dané hlavními osami setrvačnosti kvádrů jsem změřil podle (5).

Rozměry kvádrů jsem změřil digitálním posuvným měřidlem.

### Moment setrvačnosti kvádrů vzhledem k zadané obecné ose nepřímo

Moment setrvačnosti kvádrů vzhledem k zadané obecné ose jsem také změřil nepřímo — podle (6).

### Ověření Steinerovy věty

Dále označím

$T_{t,k}$  ... perioda kmitů tyče jako kyvadla kolem osy (dále jen *uvažovaná osa*) při jejím okraji, rovnoběžné se *zmíněnou osou*  
 $m_t$  ... hmotnost tyče  
 $d$  ... vzdálenost mezi *zmíněnou osou* a *uvažovanou osou*  
 $g$  ... tíhové zrychlení

Za účelem ověření Steinerovy věty jsem změřil moment setrvačnosti tyče vzhledem ke *zmíněné ose* také podle (9), tedy způsobem vycházejícím ze Steinerovy věty.

Do závitu tyče jsem umístil šroubek (abych měřil stejné těleso jako při měření metodou torzních kmitů), jeden z břitů tyče jsem umístil do lůžka pro kyvadlo, tyč vychýlil asi o  $4^\circ$  a stopkami změřil periodu kmitů takového kyvadla (za účelem zvýšení přesnosti jsem měřil dobu 10 kmitů); měření jsem opakoval i pro druhý břit.

Hmotnost tyče jsem změřil na laboratorních vahách. Vzdálenost mezi *zmíněnou* a *uvažovanou osou* jsem určil jako polovinu vzdálenosti mezi břity (zde jsem opět použil předpokladu, že závit je v těžišti tyče<sup>1</sup>; to, že závity jsou přibližně stejně daleko od konců tyče, jsem ověřil pomocí posuvného měřidla). Jako tíhové zrychlení jsem použil tabelovanou hodnotu.

Vliv šroubku na měřené momenty setrvačnosti zanedbám.

## Výsledky měření

### Podmínky měření

místo: Praha, Ke Karlovu 3  
čas: 11.4.2008  
teplota vzduchu:  $23,9^\circ\text{C}$   
atmosférický tlak: 97,05 kPa  
vlhkost vzduchu: 40,6%

### Přesnost přístrojů

stopky řízené síťovou frekvencí:  $2 \cdot 10^{-2}$  s  
laboratorní váhy:  $10^{-4}$  kg  
pásové měřidlo:  $10^{-3}$  m  
digitální posuvné měřidlo:  $3 \cdot 10^{-5}$  m

### Ostatní pomůcky

kvadr se závity pro upevnění drátu, tyč se závitem uprostřed a břity na koncích, válec se závitem v ose, stojan na upevnění drátu nebo kyvadla, drát se šroubkem, lůžko pro kyvadlo, šroubek

<sup>1</sup> Neuvažil jsem za vhodné ve Steinerově větě použít namísto přibližné vzdálenosti *zmíněné osy* od těžiště skutečnou vzdálenost od závitu, protože při měření  $J_{t,0}$  podle (4) jsem si všimnul, že osa rotace byla posunuta od závitu k těžišti.

**Hmotnost válce**

$$m_v = 903,8 \text{ g}$$

přístroj: laboratorní váhy  
 přesnost přístroje:  $\Delta[m_v] = 0,1 \text{ g}$   
 chyba měření:  $\varepsilon[m_v] = \Delta[m_v]$   
 výsledek měření:  $m_v = (9,038 \pm 0,001) \cdot 10^{-1} \text{ kg}$

**Poloměr válce**

Tab. 1: Průměr válce

č.m.	1	2	3	4	5
$2r_v [\text{mm}]$	108,05	108,07	108,07	108,05	108,08

přístroj: digitální posuvné měřidlo  
 přesnost přístroje:  $\Delta[2r_v] = 0,03 \text{ mm}$   
 standardní odchylka:  $\sigma[2r_v] = 0,006 \text{ mm}$   
 krajní statistická chyba:  $3\sigma[2r_v]$   
 chyba měření:  $\varepsilon[2r_v] = \sqrt{\Delta[2r_v]^2 + (3\sigma[2r_v])^2}$   
 očekávaná hodnota: aritmetický průměr hodnot ze souboru  
 výsledek měření:  $r_v = (5,403 \pm 0,002) \cdot 10^{-2} \text{ m}$

**Perioda torzních kmitů válce**

Tab. 1: Perioda torzních kmitů válce

č.m.	1	2	3	4	5	6	7
$5T_v [\text{s}]$	61,05	60,88	61,00	60,97	60,63	60,99	60,85

přístroj: stopky řízené síťovou frekvencí  
 přesnost přístroje:  $\Delta[5T_v] = 0,2 \text{ s}$   
 (určeno jako kvadratický součet přesnosti stopek a přesnosti experimentátora 0,2 s)  
 standardní odchylka:  $\sigma[5T_v] = 0,05 \text{ s}$   
 krajní statistická chyba:  $3\sigma[5T_v]$   
 chyba měření:  $\varepsilon[5T_v] = \sqrt{\Delta[5T_v]^2 + (3\sigma[5T_v])^2}$   
 očekávaná hodnota: aritmetický průměr hodnot ze souboru  
 výsledek měření:  $T_v = (1,218 \pm 0,005) \cdot 10^1 \text{ s}$

**Perioda torzních kmitů kvádrů kolem osy rovnoběžné s  $a_1$** Tab. 2: Perioda torzních kmitů kvádrů kolem osy rovnoběžné s  $a_1$ 

č.m.	1	2	3	4	5	6	7
$5T_{k_1} [\text{s}]$	32,14	32,03	32,28	32,06	32,21	32,02	32,11
$\Delta[5T_{k_1}] [\text{s}]$	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2

č.m.	8	9	10	11
$10T_{k_1} [\text{s}]$	64,03	63,87	64,03	63,94
$\Delta[10T_{k_1}] [\text{s}]$	0,2	0,2	0,2	0,2

přístroj: stopky řízené síťovou frekvencí  
 přesnost přístroje: viz tabulka  
 (určeno jako kvadratický součet přesnosti stopek a přesnosti experimentátora 0,2 s)  
 chyba měření:  $\varepsilon[T_{k_1}] = \Delta[T_{k_1}]$

Výsledná hodnota parametru fitu (fituji konstantní funkci):

$$T_{k_1} = (6,41 \pm 0,03) \text{ s}$$

(Uvádím krajní statistickou chybu, rovnou trojnásobku standardní odchylky.)

**Perioda torzních kmitů kvádrů kolem osy rovnoběžné s  $a_2$** Tab. 3: Perioda torzních kmitů kvádrů kolem osy rovnoběžné s  $a_2$ 

č.m.	1	2	3	4	5	6	7
$5T_{k_2} [\text{s}]$	58,51	58,66	58,54	58,51	58,52	58,62	58,57

přístroj:	stopky řízené síťovou frekvencí
přesnost přístroje:	$\Delta[5T_{k_2}] = 0,2 \text{ s}$ (určeno jako kvadratický součet přesnosti stopek a přesnosti experimentátora 0,2 s)
standardní odchylka:	$\sigma[5T_{k_2}] = 0,02 \text{ s}$
krajní statistická chyba:	$3\sigma[5T_{k_2}]$
chyba měření:	$\varepsilon[5T_{k_2}] = \sqrt{\Delta[5T_{k_2}]^2 + (3\sigma[5T_{k_2}])^2}$
očekávaná hodnota:	aritmetický průměr hodnot ze souboru
výsledek měření:	$T_{k_2} = (1,171 \pm 0,004) \cdot 10^1 \text{ s}$

**Perioda torzních kmitů kvádrů kolem osy rovnoběžné s  $a_3$** Tab. 4: Perioda torzních kmitů kvádrů kolem osy rovnoběžné s  $a_3$ 

č.m.	1	2	3	4	5	6	7
$5T_{k_3} [\text{s}]$	65,55	65,19	65,41	65,34	65,18	65,32	65,26

přístroj:	stopky řízené síťovou frekvencí
přesnost přístroje:	$\Delta[5T_{k_3}] = 0,2 \text{ s}$ (určeno jako kvadratický součet přesnosti stopek a přesnosti experimentátora 0,2 s)
standardní odchylka:	$\sigma[5T_{k_3}] = 0,05 \text{ s}$
krajní statistická chyba:	$3\sigma[5T_{k_3}]$
chyba měření:	$\varepsilon[5T_{k_3}] = \sqrt{\Delta[5T_{k_3}]^2 + (3\sigma[5T_{k_3}])^2}$
očekávaná hodnota:	aritmetický průměr hodnot ze souboru
výsledek měření:	$T_{k_3} = (1,306 \pm 0,005) \cdot 10^1 \text{ s}$

**Perioda torzních kmitů kvádrů kolem zadané obecné osy**

Tab. 5: Perioda torzních kmitů kvádrů kolem zadané obecné osy

č.m.	1	2	3	4	5	6	7
$8T_{k_u} [\text{s}]$	62,34	62,26	62,22	62,40	62,43	62,18	62,25

přístroj:	stopky řízené síťovou frekvencí
přesnost přístroje:	$\Delta[8T_{k_u}] = 0,2 \text{ s}$ (určeno jako kvadratický součet přesnosti stopek a přesnosti experimentátora 0,2 s)
standardní odchylka:	$\sigma[8T_{k_u}] = 0,04 \text{ s}$
krajní statistická chyba:	$3\sigma[8T_{k_u}]$
chyba měření:	$\varepsilon[8T_{k_u}] = \sqrt{\Delta[8T_{k_u}]^2 + (3\sigma[8T_{k_u}])^2}$
očekávaná hodnota:	aritmetický průměr hodnot ze souboru
výsledek měření:	$T_{k_u} = (7,79 \pm 0,03) \text{ s}$

**Perioda torzních kmitů tyče kolem *zmíněné osy***Tab. 6: Perioda torzních kmitů tyče kolem *zmíněné osy*

č.m.	1	2	3	4	5	6	7
$4T_{t,t} [\text{s}]$	71,10	71,15	71,17	71,24	71,15	71,34	70,98

přístroj:	stopky řízené síťovou frekvencí
přesnost přístroje:	$\Delta[4T_{t,t}] = 0,2 \text{ s}$ (určeno jako kvadratický součet přesnosti stopek a přesnosti experimentátora 0,2 s)
standardní odchylka:	$\sigma[4T_{t,t}] = 0,04 \text{ s}$
krajní statistická chyba:	$3\sigma[4T_{t,t}]$
chyba měření:	$\varepsilon[4T_{t,t}] = \sqrt{\Delta[4T_{t,t}]^2 + (3\sigma[4T_{t,t}])^2}$
očekávaná hodnota:	aritmetický průměr hodnot ze souboru
výsledek měření:	$T_{t,t} = (1,779 \pm 0,006) \cdot 10^1 \text{ s}$

**Hlavní moment setrvačnosti kvádrů vůči ose rovnoběžné s  $a_1$** 

$J_{k_1}$  změřím podle (4)

Chybu měření určím podle zákona šíření chyb [3, str. 44, (3,43)].

$$J_{k_1} = (3,65 \pm 0,05) \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

**Hlavní moment setrvačnosti kvádrů vůči ose rovnoběžné s  $a_2$**  $J_{k_2}$  změřím podle (4)

Chybu měření určím podle zákona šíření chyb [3, str. 44, (3,43)].

$$J_{k_2} = (1,22 \pm 0,01) \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

**Hlavní moment setrvačnosti kvádrů vůči ose rovnoběžné s  $a_3$**  $J_{k_3}$  změřím podle (4)

Chybu měření určím podle zákona šíření chyb [3, str. 44, (3,43)].

$$J_{k_3} = (1,52 \pm 0,02) \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

**Moment setrvačnosti kvádrů vůči zadané obecné ose metodou torzních kmitů** $J_{k_u}$  změřím podle (4)

Chybu měření určím podle zákona šíření chyb [3, str. 44, (3,43)].

$$J_{k_u} = (5,39 \pm 0,06) \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

**Moment setrvačnosti tyče vůči *zmíněné* ose metodou torzních kmitů** $J_{t,0}$  změřím podle (4)

Chybu měření určím podle zákona šíření chyb [3, str. 44, (3,43)].

$$J_{t,0} = (2,81 \pm 0,03) \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

**Jednotkový vektor ve směru zadané obecné osy v bázi  $\{e_1; e_2; e_3\}$**  $\nu_1, \nu_2, \nu_3$  změřím podle (5)

Chybu měření určím podle zákona šíření chyb [3, str. 44, (3,43)].

$$\nu_1 = (8,943 \pm 0,003) \cdot 10^{-1}$$

$$\nu_2 = (4,474 \pm 0,005) \cdot 10^{-1}$$

$$\nu_3 = 0$$

**Rozměry kvádrů**

Tab. 7: Nejdelší hrana kvádrů

č.m.	1	2	3	4	5
$a_1$ [mm]	127,96	128,01	127,94	128,00	127,85

Tab. 8: Hrana kvádrů, která není ani nejdelší, ani nejkratší

č.m.	1	2	3	4	5
$a_2$ [mm]	63,98	64,04	63,95	64,02	64,09

přístroj:

digitální posuvné měřidlo

přesnost přístroje:

$$\Delta[a_k] = 0,03 \text{ mm}$$

standardní odchylky:

$$\sigma[a_1] = 0,03 \text{ mm}$$

$$\sigma[a_2] = 0,02 \text{ mm}$$

krajní statistická chyba:

$$3\sigma[a_k]$$

chyba měření:

$$\varepsilon[a_k] = \sqrt{\Delta[a_k]^2 + (3\sigma[a_k])^2}$$

očekávaná hodnota:

aritmetický průměr hodnot ze souboru

výsledky měření:

$$a_1 = (1,2795 \pm 0,0009) \cdot 10^{-1} \text{ m}$$

$$a_2 = (6,402 \pm 0,008) \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

**Moment setrvačnosti kvádrů vůči zadané obecné ose nepřímo** $J_{k_u}$  změřím podle (6)

Chybu měření určím podle zákona šíření chyb [3, str. 44, (3,43)].

$$J_{k_u} = (5,36 \pm 0,05) \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

**Hmotnost tyče**

$$m_t = 281,7 \text{ g}$$

přístroj:

laboratorní váhy

přesnost přístroje:

$$\Delta[m_t] = 0,1 \text{ g}$$

chyba měření:

$$\varepsilon[m_t] = \Delta[m_t]$$

výsledek měření:

$$m_t = (2,817 \pm 0,001) \cdot 10^{-1} \text{ kg}$$

**Vzdálenost mezi zmíněnou a uvažovanou osou**

$$2d = 313,5 \text{ mm}$$

přístroj: pásové měřidlo

přesnost přístroje:  $\Delta[2d] = 1,0 \text{ mm}$

chyba měření:  $\varepsilon[2d] = \Delta[2d]$  (statistická chyba je malá ve srovnání s přesností přístroje)

výsledek měření:  $d = (1,568 \pm 0,005) \cdot 10^{-1} \text{ m}$

**Perioda kmitů tyče jako kyvadla kolem uvažované osy**

Tab. 10: Perioda kmitů tyče jako kyvadla kolem uvažované osy

č.m.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$10T_{t,k} [\text{s}]$	9,45	9,48	9,49	9,38	9,38	9,36	9,47	9,42	9,43	9,46	9,34	9,44	9,32	9,34	9,31	9,37

Měření č. 1 – 8 pocházejí z měření pro jeden břit v ose kyvadla, měření č. 9 – 16 pocházejí z měření pro druhý břit v ose kyvadla.

přístroj: stopky řízené síťovou frekvencí

přesnost přístroje:  $\Delta[10T_{t,k}] = 0,2 \text{ s}$

(určeno jako kvadratický součet přesnosti stopek a přesnosti experimentátora 0,2 s)

standardní odchylka:  $\sigma[10T_{t,k}] = 0,01 \text{ s}$

krajní statistická chyba:  $3\sigma[10T_{t,k}]$

chyba měření:  $\varepsilon[10T_{t,k}] = \sqrt{\Delta[10T_{t,k}]^2 + (3\sigma[10T_{t,k}])^2}$

očekávaná hodnota: aritmetický průměr hodnot ze souboru

výsledek měření:  $T_{t,k} = (9,4 \pm 0,2) \cdot 10^{-1} \text{ s}$

**Tíhové zrychlení v Praze**

$g = 9,810 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$  (budu považovat za neomezeně přesné)

zdroj: [2]

**Moment setrvačnosti tyče vůči zmíněné ose s použitím Steinerovy věty**

$J_{t,0}$  změřím podle (9)

Chybu měření určím podle zákona šíření chyb [3, str. 44, (3,43)].

$J_{t,0} = (2,8 \pm 0,4) \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$

**Diskuse**

Uvedené chyby měření složek jednotkového vektoru ve směru zadané obecné osy zahrnují pouze chyby měření rozměrů kvádrů; chyba způsobená odchylkou skutečné osy od předpokládané (tj. stěnové úhlopříčky) není ale pravděpodobně příliš velká.

Měření momentu setrvačnosti kvádrů vzhledem k zadané obecné ose výpočtem z hlavních momentů setrvačnosti se shoduje v rámci chyby s jeho měřením metodou torzních kmitů. Chyby obou těchto měření jsou podobné. Na měření momentů setrvačnosti kvádrů metodou torzních kmitů měla také jistý vliv matka šroubku, která spolu s kvádrem (a také s válcem) kmitala. Chyba jím způsobená je největší v případě měření momentu setrvačnosti kvádrů vůči ose rovnoběžné s jeho nejdelší hranou, ve kterém se pohybuje pravděpodobně na hranici zanedbatelnosti. Kdybych do modelu matku zahrnul, měření momentů setrvačnosti kvádrů by bylo přesnější.

Měření momentu setrvačnosti tyče vzhledem ke zmíněné ose metodou fyzikálního kyvadla a metodou torzních kmitů se shodují v rámci chyby. Chyba měření metodou fyzikálního kyvadla byla řádově desetkrát větší; to je způsobeno především velkým útlumem kyvadla, jenž měl za následek velkou nepřesnost měření periody. Pro zpřesnění by bylo možné nechat kyvadlo kývat s větší výchylkou a použít skutečný model fyzikálního kyvadla (pro makroskopické výchylky) a zahrnout do něj tření. V obou metodách jsem použil předpokladu, že závit je v těžišti tyče; zároveň jsem však změřil, že je od něj posunut přibližně o 1,5 mm. V metodě torzních kmitů se tato odchylka mohla projevit tím, že tyč nekmitala přesně okolo osy procházející těžištěm — vzhledem k délce drátu (přibližně  $4 \cdot 10^{-1} \text{ m}$ ) a jeho pružnosti však lze očekávat, že tato odchylka skutečné osy otáčení od těžiště je malá; to jsem také v průběhu kmitání tyče pozoroval. V metodě fyzikálního kyvadla jsem diskutového předpokladu využil při aplikaci Steinerovy věty proto, aby momenty setrvačnosti určené oběma metodami byly měřené vůči stejné ose (viz též poznámka v části *postup měření*).

## Závěr

Metodou torzních kmitů jsem změřil hlavní momenty setrvačnosti kvádrů:

$$J_{k_1} = (3,65 \pm 0,05) \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$J_{k_2} = (1,22 \pm 0,01) \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$J_{k_3} = (1,52 \pm 0,02) \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Změřil jsem složky jednotkového vektoru ve směru zadané obecné osy v souřadné soustavě dané hlavními osami setrvačnosti kvádrů:

$$\nu_1 = (8,943 \pm 0,003) \cdot 10^{-1}$$

$$\nu_2 = (4,474 \pm 0,005) \cdot 10^{-1}$$

$$\nu_3 = 0$$

Z naměřených hlavních momentů setrvačnosti kvádrů jsem určil moment setrvačnosti kvádrů vzhledem k zadané obecné ose:

$$J_{k_u} = (5,36 \pm 0,05) \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Výsledek jsem ověřil měřením metodou torzních kmitů:

$$J_{k_u} = (5,39 \pm 0,06) \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Moment setrvačnosti tyče vzhledem ke *zmíněné ose* jsem změřil s použitím Steinerovy věty metodou fyzikálního kyvadla:

$$J_{t,0} = (2,8 \pm 0,4) \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Výsledek jsem ověřil měřením metodou torzních kmitů, čímž jsem ověřil platnost Steinerovy věty:

$$J_{t,0} = (2,81 \pm 0,03) \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

## Reference

- [1] KVASNICA, Jozef. *Mechanika*. 1. vydání. Praha: Academia, 1988.
- [2] MIKULČÁK, Jiří. *Matematické, fyzikální a chemické tabulky a vzorce pro střední školy*. 1. vydání. Praha: Prometheus, spol. s r. o., 2005. ISBN 80-7196-264-3.
- [3] BROŽ, Jaromír. *Základy fyzikálních měření (I)*. 1. vydání. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, n. p., 1967.