

## Úkol

### Pracovní úkol

1. Pro tři vodorovné trubice s různými poloměry kruhového průřezu, které jsou opatřeny manometry, naměřte závislost objemového průtoku  $Q_v$  na úbytku statického tlaku  $\Delta p$  na vyšetřované délce trubice  $l$  ve směru proudění.
2. Sestrojte grafy závislosti  $Q_v = Q_v(\Delta p)$ . Do grafu také zakreslete teoretické křivky této závislosti plynoucí z Poiseuillovy rovnice.
3. Ze směrnice závislosti  $Q_v = Q_v(\Delta p)$  v oblasti laminárního proudění určete poloměr trubice.
4. Upravený poloměr dosadte do vztahů pro výpočet  $Re$  a  $k$ .
5. Sestrojte graf závislosti  $k = k(Re)$ , kde  $k$  je součinitel odporu trubice a  $Re$  je Reynoldsovo číslo.

### Klíčová slova

laminární a turbulentní proudění, Poiseuillova rovnice, součinitel odporu trubice, Reynoldsovo číslo

### Pokyny k měření

1. Vysvětlete, proč u některých trubic kolísala během měření výška vodního sloupce v manometru. Odhadněte maximální změnu  $(\Delta h/h)$  během jednoho měření v procentech.
2. V oblasti laminárního proudění změřte dostatečný počet experimentálních bodů.
3. Závislost  $Q_v = Q_v(\Delta p)$  (resp.  $k = k(Re)$ ) vynesete pro všechny měřené trubice do jednoho grafu.

## Teorie

Pro  $i \in \{1; 2; 3\}$ , určující číslo trubice, označme:

$l_i$	..... vzdálenost od manometru k ústí $i$ -té trubice
$r_i$	..... poloměr $i$ -té trubice
$\Delta p_i$	..... úbytek statického tlaku mezi manometrem a ústím trubice
$h_{i,j}$	..... výška vodního sloupce v manometru při $j$ -tém měření
$\delta_{h_{i,j}}$	..... maximální relativní odchylka při měření $h_{i,j}$
$Q_{i,j}$	..... průměrný objemový průtok při $j$ -tém měření
$Q_i(\Delta p)$	..... závislost objemového průtoku na úbytku statického tlaku mezi manometrem a ústím trubice
$t_{i,j}$	..... doba $j$ -tého měření objemového průtoku
$V_{i,j}$	..... množství vody vyteklé z trubice za dobu $j$ -tého měření
$Re_{i,j}$	..... Reynoldsovo číslo při $j$ -tém měření
$k_{i,j}$	..... součinitel odporu trubice při $j$ -tém měření
$k_i(Re)$	..... závislost součinitele odporu trubice na Reynoldsově čísle
$v_{i,j}$	..... průměrná rychlost vody při $j$ -tém měření
$\eta$	..... dynamická viskozita vody
$\rho$	..... hustota vody
$g$	..... tíhové zrychlení
$\alpha_i$	..... $(\pi r_i^4)/(8\eta l_i)$

Úbytek statického tlaku na délce  $l_i$  je rovný [1]:

$$\Delta p_{i,j} = h_{i,j} \rho g \quad (1)$$

Průměrný objemový průtok při  $j$ -tém měření definujeme jako

$$Q_{i,j} = \frac{V_{i,j}}{t_{i,j}} \quad (2)$$

Je-li Reynoldsovo číslo

$$Re_{i,j} = \frac{r_i \rho v_{i,j}}{\eta} \quad (3)$$

menší než určitá hodnota (přibližně 2000), je proudění laminární [1].

Pro průměrnou rychlost vody při  $j$ -tém měření platí:

$$v_{i,j} = \frac{Q_{i,j}}{\pi r_i^2} \quad (4)$$

Při laminárním proudění je objemový průtok charakterizován Poiseuillovou rovnicí [1]:

$$Q_i(\Delta p) = \frac{\pi r_i^4}{16\eta l_i} \Delta p \quad (5)$$

Součinitel odporu trubice při  $j$ -tém měření zavedeme vztahem:

$$\Delta p_{i,j} = k_{i,j} \frac{l_i}{r_i} \frac{1}{2} \rho v_{i,j}^2 \quad (6)$$

tedy

$$k_{i,j} = \frac{2r_i \Delta p_{i,j}}{\rho v_{i,j}^2 l_i} \quad (7)$$

Pro laminární proudění pak podle Poiseuillovy rovnice platí:

$$k_i(Re) = \frac{16}{Re} \quad (8)$$

Pro turbulentní proudění platí experimentálně zjištěná závislost [2]

$$k_i(Re) \approx \frac{0,133}{\sqrt[4]{Re}} \quad (9)$$

Označme:

$T$  . . . průměrná teplota vody v průběhu experimentu

## Postup měření

Při měření závislosti objemového průtoku na úbytku statického tlaku jsem použil tři různé vodorovné trubice kruhového průřezu, opatřené manometrem a jedním koncem připojené hadicí s ventilem k nádobě s vodou, dostatečně široké, aby bylo lze považovat celkový tlak v hadici během jednoho měření za konstantní. Manometr spočíval v trubici, napojené svisle na vodorovnou trubici, nahoře otevřená a opatřené stupnicí s dílkou po 1 mm.

Ventil jsem vždy nastavil na požadovaný úbytek tlaku a odměrným válcem jsem změřil objem vody vyteklé z trubice za náhodně zvolenou dobu, změřenou stopkami. Během měření jsem sledoval kolísání vodního sloupce v manometru. Úbytek tlaku jsem měřil manometrem podle (1). Podle (2) jsem změřil průměrný objemový průtok trubici.

Pro každou trubici jsem pásovým měřidlem změřil vzdálenost od manometru k jejímu ústí a posuvným měřidlem vnitřní průměr ústí v různých směrech.

Na začátku a na konci experimentu jsem rtuťovým teploměrem změřil teplotu vody vyteklé z trubice.

## Výsledky měření

### Podmínky měření

místo:	Praha, Ke Karlovu 3
čas:	19.3.2008
teplota vzduchu:	23,7 °C
atmosférický tlak:	98,07 kPa
vlhkost vzduchu:	27,0%

### Přesnost přístrojů

1. odměrný válec:	$2 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$
2. odměrný válec:	$10^{-6} \text{ m}^3$
3. odměrný válec:	$10^{-7} \text{ m}^3$
pásové měřidlo:	$10^{-3} \text{ m}$
posuvné měřidlo:	$10^{-4} \text{ m}$
ruční stopky:	$2 \cdot 10^{-1} \text{ s}$
stupnice na manometru:	$10^{-3} \text{ m}$
rtuťový teploměr:	1 °C

**Ostatní pomůcky**

3 vodorovné kruhové trubice s manometry, odpadní miska, nádoba s vodou, připojitelná k trubicím hadicím s ventilem

**Tíhové zrychlení v Praze**

$$g = 9,810 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \quad (\text{budu považovat za neomezeně přesné})$$

zdroj: [3]

**Průměrná teplota vody v průběhu experimentu**

Tab. 1: Průměrná teplota vody v průběhu experimentu

č.m.	1	2
$T [^{\circ}\text{C}]$	23	22

přístroj: rtuťový teploměr  
 přesnost přístroje:  $\Delta[T] = 1^{\circ}\text{C}$   
 standardní odchylka:  $\sigma[T] = 0,5^{\circ}\text{C}$   
 krajní statistická chyba:  $3\sigma[T]$   
 chyba měření:  $\varepsilon[T] = \sqrt{\Delta[T]^2 + (3\sigma[T])^2}$   
 očekávaná hodnota: aritmetický průměr hodnot ze souboru  
 výsledek měření:  $T = (23 \pm 2)^{\circ}\text{C}$

**Hustota vody při teplotě  $20^{\circ}\text{C}$** 

$$\rho = 998,21 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} \quad (\text{budu považovat za neomezeně přesné})$$

zdroj: [3]

**Závislosti objemového průtoku na úbytku statického tlaku v trubicích**

vztahy:  $\Delta p_{i,j} \dots$  změřeno podle (1)  
 $Q_{i,j} \dots$  změřeno podle (2)  
 přístroje: manometr, odměrné válce, ruční stopky  
 přesnosti přístrojů:  $\Delta[h_{i,j}] = 1 \text{ mm}$   
 $\Delta[V_{i,j}] \dots$  viz tabulky  
 $\Delta[t_{i,j}] = 0,3 \text{ s}$   
 (určeno jako kvadratický součet přesnosti stopek a přesnosti experimentátora 0,2 s)  
 chyby měření:  $\varepsilon[h_{i,j}] = \sqrt{\Delta[h_{i,j}]^2 + (\delta_{h_{i,j}} h_{i,j})^2}$   
 $\varepsilon[V_{i,j}] = \Delta[V_{i,j}]$   
 $\varepsilon[t_{i,j}] = \Delta[t_{i,j}]$   
 $\varepsilon[\Delta p_{i,j}] \dots$  podle zákona šíření chyb [4, str. 44, (3,43)]  
 $\varepsilon[Q_{i,j}] \dots$  podle zákona šíření chyb [4, str. 44, (3,43)]

Tab. 2: Závislost objemového průtoku na úbytku statického tlaku v 1. trubici

č.m.	1	2	3	4	5	6	7	8
$h_{1,j} [10^{-3} \text{ m}]$	268,5	240,0	220,0	199,0	185,0	169,5	155,0	138,0
$\delta_{h_{1,j}}$	0,2%	0,8%	0,9%	0,8%	0,5%	0,3%	0,5%	0,5%
$V_{1,j} [10^{-6} \text{ m}^3]$	96	88	88	90	82	89	96	86
$\Delta[V_{1,j}] [10^{-6} \text{ m}^3]$	2	2	2	2	2	2	2	2
$t_{1,j} [\text{s}]$	7,4	7,2	7,4	8,2	7,6	9,0	10,2	9,6
$\Delta p_{1,j} [10 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}]$	263	235	215	195	181	166	152	135
$\varepsilon[\Delta p_{1,j}] [10 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}]$	1	2	2	2	1	1	1	1
$Q_{1,j} [10^{-7} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}]$	129,7	122,2	118,9	109,8	107,9	98,9	94,1	89,6
$\varepsilon[Q_{1,j}] [10^{-7} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}]$	5,6	5,5	5,3	4,5	4,8	3,8	3,3	3,4

č.m.	9	10	11	12	13	14	15
$h_{1,j}$ [ $10^{-3}$ m]	128,0	115,0	103,0	83,0	63,0	52,0	46,0
$\delta_{h_{1,j}}$	0,8%	2,6%	1,9%	9,0%	12%	4,8%	3,3%
$V_{1,j}$ [ $10^{-6}$ m <sup>3</sup> ]	86	92	89	80	89	45,0	46,0
$\Delta[V_{1,j}]$ [ $10^{-6}$ m <sup>3</sup> ]	2	2	2	2	2	1	1
$t_{1,j}$ [s]	10,2	11,4	12,0	11,6	13,6	7,6	8,4
$\Delta p_{1,j}$ [ $10 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$ ]	125	113	101	81	62	51	45
$\varepsilon[\Delta p_{1,j}]$ [ $10 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$ ]	1	3	2	7	7	3	2
$Q_{1,j}$ [ $10^{-7}$ m <sup>3</sup> · s <sup>-1</sup> ]	84,3	80,7	74,2	69,0	65,4	59,2	54,8
$\varepsilon[Q_{1,j}]$ [ $10^{-7}$ m <sup>3</sup> · s <sup>-1</sup> ]	3,1	2,7	2,4	2,4	2,0	2,6	2,2

č.m.	16	17	18	19	20	21	22
$h_{1,j}$ [ $10^{-3}$ m]	40,0	35,0	30,0	25,5	21,0	15,0	10,0
$\delta_{h_{1,j}}$	1,9%	1,4%	0,3%	0,4%	1,2%	0,0%	2,5%
$V_{1,j}$ [ $10^{-6}$ m <sup>3</sup> ]	45,0	46,5	46,5	46,0	47,0	4,65	4,75
$\Delta[V_{1,j}]$ [ $10^{-6}$ m <sup>3</sup> ]	1	1	1	1	1	0,1	0,1
$t_{1,j}$ [s]	9,2	10,6	12,0	14,2	17,8	3,8	14,2
$\Delta p_{1,j}$ [ $10 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$ ]	39	34	29	25	21	15	10
$\varepsilon[\Delta p_{1,j}]$ [ $10 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$ ]	1	1	1	1	1	1	1
$Q_{1,j}$ [ $10^{-7}$ m <sup>3</sup> · s <sup>-1</sup> ]	48,9	43,9	38,8	32,4	26,4	12,2	3,3
$\varepsilon[Q_{1,j}]$ [ $10^{-7}$ m <sup>3</sup> · s <sup>-1</sup> ]	1,9	1,5	1,2	1,0	0,7	0,9	0,1

Tab. 3: Závislost objemového průtoku na úbytku statického tlaku ve 2. trubici

č.m.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$h_{2,j}$ [ $10^{-3}$ m]	268,0	235,0	221,5	205,5	197,0	180,5	176,0	163,0	157,0
$\delta_{h_{2,j}}$	3,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,3%	0,3%	0,0%	0,2%
$V_{2,j}$ [ $10^{-6}$ m <sup>3</sup> ]	81	88	92	87	82	79	75	90	84
$\Delta[V_{2,j}]$ [ $10^{-6}$ m <sup>3</sup> ]	2	2	2	2	2	2	2	2	2
$t_{2,j}$ [s]	16,8	19,6	21,8	23,0	22,2	22,4	21,6	28,6	27,2
$\Delta p_{2,j}$ [ $10 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$ ]	262	230	217	201	193	177	172	160	154
$\varepsilon[\Delta p_{2,j}]$ [ $10 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$ ]	8	1	1	1	1	1	1	1	1
$Q_{2,j}$ [ $10^{-7}$ m <sup>3</sup> · s <sup>-1</sup> ]	48,2	44,9	42,2	37,8	36,9	35,3	34,7	31,5	30,9
$\varepsilon[Q_{2,j}]$ [ $10^{-7}$ m <sup>3</sup> · s <sup>-1</sup> ]	1,4	1,2	1,1	1,0	1,0	1,0	1,0	0,8	0,8

č.m.	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$h_{2,j}$ [ $10^{-3}$ m]	140,0	128,0	110,0	109,0	79,5	70,5	55,0	25,0	16,0
$\delta_{h_{2,j}}$	0,0%	0,2%	0,5%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	1,6%
$V_{2,j}$ [ $10^{-6}$ m <sup>3</sup> ]	89	91	89	83	79	80	76	4,70	4,85
$\Delta[V_{2,j}]$ [ $10^{-6}$ m <sup>3</sup> ]	2	2	2	2	2	2	2	0,1	0,1
$t_{2,j}$ [s]	32,4	35,2	41,0	46,2	54,8	55,2	67,0	9,2	14,4
$\Delta p_{2,j}$ [ $10 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$ ]	137	125	108	107	78	69	54	24	16
$\varepsilon[\Delta p_{2,j}]$ [ $10 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$ ]	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$Q_{2,j}$ [ $10^{-7}$ m <sup>3</sup> · s <sup>-1</sup> ]	27,5	25,9	21,7	18,0	14,4	14,5	11,3	5,1	3,4
$\varepsilon[Q_{2,j}]$ [ $10^{-7}$ m <sup>3</sup> · s <sup>-1</sup> ]	0,7	0,6	0,5	0,4	0,4	0,4	0,3	0,2	0,1

Tab. 4: Závislost objemového průtoku na úbytku statického tlaku ve 3. trubici

č.m.	1	2	3	4	5	6	7	8
$h_{3,j}$ [ $10^{-3}$ m]	289,0	264,0	230,0	200,0	155,0	128,0	113,0	103,5
$\delta_{h_{3,j}}$	0,07%	0,2%	5,2%	5,0%	9,7%	1,6%	0,9%	0,2%
$V_{3,j}$ [ $10^{-6}$ m <sup>3</sup> ]	90	87	89	88	84	81	92	95
$\Delta[V_{3,j}]$ [ $10^{-6}$ m <sup>3</sup> ]	2	2	2	2	2	2	2	2
$t_{3,j}$ [s]	11,0	10,8	11,4	11,4	11,4	11,2	13,8	15,4
$\Delta p_{3,j}$ [ $10 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$ ]	283	259	225	196	152	125	111	101
$\varepsilon[\Delta p_{3,j}]$ [ $10 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$ ]	1	1	12	10	15	2	1	1
$Q_{3,j}$ [ $10^{-7} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ ]	81,8	80,6	78,1	77,2	73,7	72,3	66,7	61,7
$\varepsilon[Q_{3,j}]$ [ $10^{-7} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ ]	2,8	2,8	2,6	2,6	2,5	2,6	2,0	1,7

č.m.	9	10	11	12	13	14	15	16
$h_{3,j}$ [ $10^{-3}$ m]	90,5	80,0	70,0	61,0	47,5	39,0	30,5	20,0
$\delta_{h_{3,j}}$	0,3%	0,1%	0,1%	0,2%	0,0%	0,3%	0,0%	0,0%
$V_{3,j}$ [ $10^{-6}$ m <sup>3</sup> ]	91	92	47,0	44,0	45,5	44,5	4,85	4,70
$\Delta[V_{3,j}]$ [ $10^{-6}$ m <sup>3</sup> ]	2	2	1	1	1	1	0,1	0,1
$t_{3,j}$ [s]	17,0	19,0	10,8	11,8	16,2	19,8	2,8	9,8
$\Delta p_{3,j}$ [ $10 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$ ]	89	78	69	60	47	38	30	20
$\varepsilon[\Delta p_{3,j}]$ [ $10 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$ ]	1	1	1	1	1	1	1	1
$Q_{3,j}$ [ $10^{-7} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ ]	53,5	48,4	43,5	37,3	28,1	22,5	17,3	4,8
$\varepsilon[Q_{3,j}]$ [ $10^{-7} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ ]	1,5	1,3	1,5	1,2	0,8	0,6	1,8	0,2

Výsledné závislosti v oblasti laminárního proudění určím metodou nejmenších čtverců [5] pro funkce  $Q_i(\Delta p) = \alpha_i \Delta p$  (z (5)), přičemž ze souboru pro účely regrese vyloučím body mimo oblast laminárního proudění.

Pro fitování závislosti pro 1. trubici vyřazuji měření č. 1 – 15, které jsem při pohledu na graf uvážil za body z přechodové a turbulentní oblasti a 21 – 22 (voda tekla již tak pomalu, že z ústí trubice kapala, a významnou chybu tak vnášela kapilarita).

$$Q_1(\Delta p) = \alpha_1 \Delta p, \text{ kde } \alpha_1 = (1,29 \pm 0,03) \cdot 10^{-8} \text{ m}^4 \cdot \text{s} \cdot \text{kg}^{-1}$$

Pro fitování závislosti pro 2. trubici vyřazuji ze souboru měření č. 13, 14, které jsem při pohledu na graf uvážil za hrubé chyby, měření č. 1 – 5, které jsem při pohledu na graf uvážil za body z přechodové oblasti a měření č. 18, při kterém voda z trubice jenom kapala (viz 1. trubice).

$$Q_2(\Delta p) = \alpha_2 \Delta p, \text{ kde } \alpha_2 = (2,03 \pm 0,04) \cdot 10^{-9} \text{ m}^4 \cdot \text{s} \cdot \text{kg}^{-1}$$

Pro fitování závislosti pro 3. trubici vyřazuji ze souboru měření č. 16 (kapilarita (viz 1. trubice)) a měření č. 1 – 6, které jsem při pohledu na graf uvážil za body z přechodové a turbulentní oblasti.

$$Q_3(\Delta p) = \alpha_3 \Delta p, \text{ kde } \alpha_3 = (6,1 \pm 0,1) \cdot 10^{-9} \text{ m}^4 \cdot \text{s} \cdot \text{kg}^{-1}$$

(Uvádím krajní statistickou chybu, rovnou trojnásobku standardní odchylky.)

### Dynamická viskozita vody při teplotě 20 °C

$$\eta = 1,002 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1} \quad (\text{budu považovat za neomezeně přesné})$$

zdroj: [3]

### Vzdálenost od manometru k ústí 1. trubice

$$l_1 = 195,5 \text{ mm}$$

přístroj: pásové měřidlo

přesnost přístroje:  $\Delta[l_1] = 1 \text{ mm}$

chyba měření:  $\varepsilon[l_1] = \Delta[l_1]$  (statistická chyba je malá ve srovnání s přesností přístroje)

výsledek měření:  $l_1 = (195,5 \pm 1,0) \text{ mm}$

### Poloměr 1. trubice určený z Poiseuillovy rovnice

$$r_1 \text{ změřím podle } r_1 = \sqrt[4]{8\eta\alpha_1 l_1 / \pi} \quad (\text{z definice } \alpha_1).$$

Chybu měření určím podle zákona šíření chyb [4, str. 44, (3,43)].

$$r_1 = (1,59 \pm 0,01) \text{ mm}$$

**Poloměr 1. trubice**

Tab. 5: Průměr 1. trubice

č.m.	1	2	3	4	5	6	7
$2r_1$ [mm]	3,5	3,4	3,4	3,5	3,4	3,3	3,4

přístroj: posuvné měřidlo  
 přesnost přístroje:  $\Delta[2r_1] = 0,1$  mm  
 standardní odchylka:  $\sigma[2r_1] = 0,03$  mm  
 krajní statistická chyba:  $3\sigma[2r_1]$   
 chyba měření:  $\varepsilon[2r_1] = \sqrt{\Delta[2r_1]^2 + (3\sigma[2r_1])^2}$   
 očekávaná hodnota: aritmetický průměr hodnot ze souboru  
 výsledek měření:  $r_1 = (1,71 \pm 0,06)$  mm

**Vzdálenost od manometru k ústí 2. trubice**

$l_2 = 250,5$  mm

přístroj: pásové měřidlo  
 přesnost přístroje:  $\Delta[l_2] = 1$  mm  
 chyba měření:  $\varepsilon[l_2] = \Delta[l_2]$  (statistická chyba je malá ve srovnání s přesností přístroje)  
 výsledek měření:  $l_2 = (250,5 \pm 1,0)$  mm

**Poloměr 2. trubice určený z Poiseuillovy rovnice**

$r_2$  změřím podle  $r_2 = \sqrt[4]{8\eta\alpha_2 l_2 / \pi}$  (z definice  $\alpha_2$ ).  
 Chybu měření určím podle zákona šíření chyb [4, str. 44, (3,43)].  
 $r_2 = (1,068 \pm 0,006)$  mm

**Poloměr 2. trubice**

Tab. 6: Průměr 2. trubice

č.m.	1	2	3	4	5	6	7
$2r_2$ [mm]	2,4	2,2	2,2	2,4	2,3	2,2	2,2

přístroj: posuvné měřidlo  
 přesnost přístroje:  $\Delta[2r_2] = 0,1$  mm  
 standardní odchylka:  $\sigma[2r_2] = 0,04$  mm  
 krajní statistická chyba:  $3\sigma[2r_2]$   
 chyba měření:  $\varepsilon[2r_2] = \sqrt{\Delta[2r_2]^2 + (3\sigma[2r_2])^2}$   
 očekávaná hodnota: aritmetický průměr hodnot ze souboru  
 výsledek měření:  $r_2 = (1,14 \pm 0,07)$  mm

**Vzdálenost od manometru k ústí 3. trubice**

$l_3 = 250$  mm

přístroj: pásové měřidlo  
 přesnost přístroje:  $\Delta[l_3] = 1$  mm  
 chyba měření:  $\varepsilon[l_3] = \Delta[l_3]$  (statistická chyba je malá ve srovnání s přesností přístroje)  
 výsledek měření:  $l_3 = (250 \pm 1)$  mm

**Poloměr 3. trubice určený z Poiseuillovy rovnice**

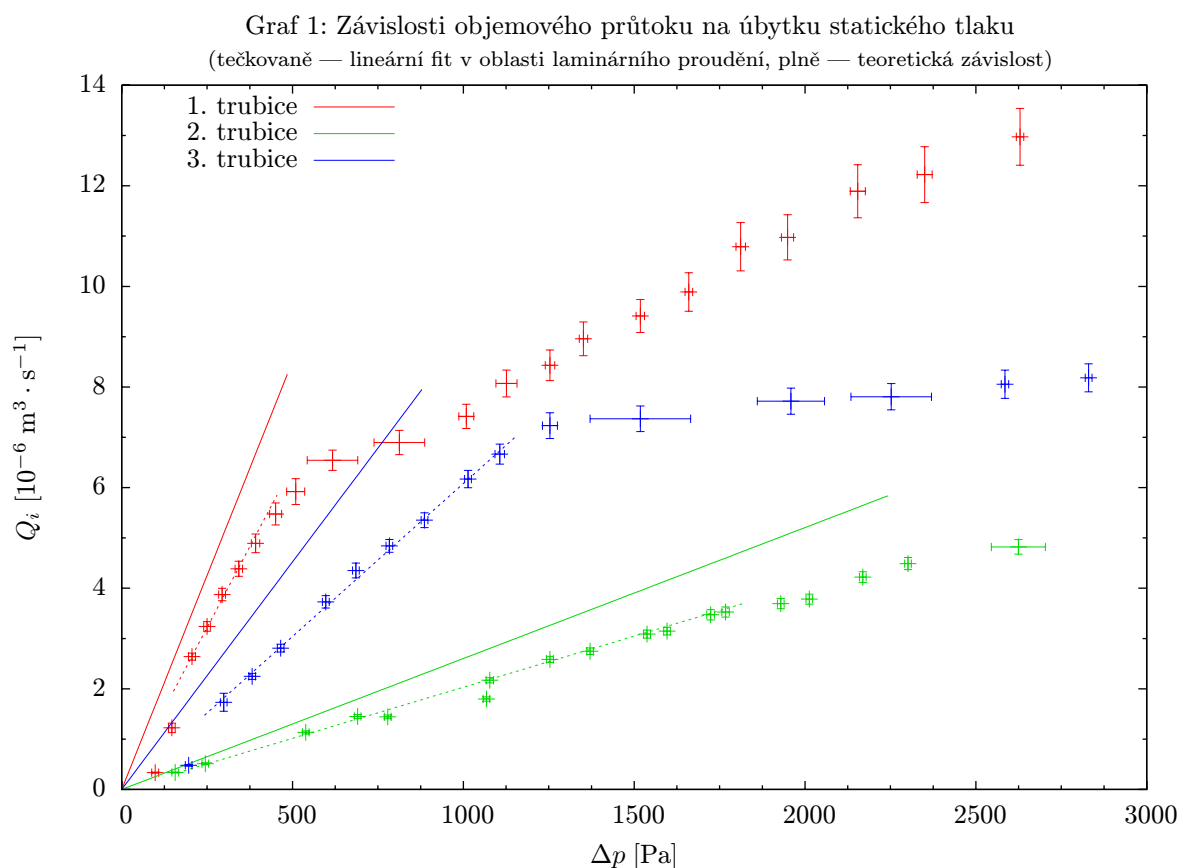
$r_3$  změřím podle  $r_3 = \sqrt[4]{8\eta\alpha_3 l_3 / \pi}$  (z definice  $\alpha_3$ ).  
 Chybu měření určím podle zákona šíření chyb [4, str. 44, (3,43)].  
 $r_3 = (1,403 \pm 0,008)$  mm

**Poloměr 3. trubice**

Tab. 7: Průměr 3. trubice

č.m.	1	2	3	4	5	6	7
$2r_3$ [mm]	3,1	3,1	3,1	3,1	3,1	3,0	3,2

přístroj: posuvné měřidlo  
 přesnost přístroje:  $\Delta[2r_3] = 0,1 \text{ mm}$   
 standardní odchylka:  $\sigma[2r_3] = 0,02 \text{ mm}$   
 krajní statistická chyba:  $3\sigma[2r_3]$   
 chyba měření:  $\varepsilon[2r_3] = \sqrt{\Delta[2r_3]^2 + (3\sigma[2r_3])^2}$   
 očekávaná hodnota: aritmetický průměr hodnot ze souboru  
 výsledek měření:  $r_3 = (1,55 \pm 0,06) \text{ mm}$

**Grafické znázornění závislosti objemového průtoku na úbytku statického tlaku**

Na grafu jsou dobře patrná rozhraní mezi laminární a přechodovou oblastí proudění (závislost přestává být lineární a  $\Delta p$  má vysokou chybu) a začátek turbulentní oblasti proudění v 1. a 3. trubici — chyba  $\Delta p$  opět přestává být vysoká.

**Závislosti součinitele odporu trubice na Reynoldsově čísle**

vztahy:  $Re_{i,j} \dots$  změřeno podle (3), s použitím poloměru trubice změřeného z (5)

$k_{i,j} \dots$  změřeno podle (7), s použitím poloměru trubice změřeného z (5)

chyby měření:  $\varepsilon[Re_{i,j}] \dots$  podle zákona šíření chyb [4, str. 44, (3,43)]

$\varepsilon[k_{i,j}] \dots$  podle zákona šíření chyb [4, str. 44, (3,43)]

Tab. 8: Závislost součinitele odporu 1. trubice na Reynoldsově čísle

č.m.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$Re_{1,j}$	2584	2435	2369	2186	2149	1970	1875	1784	1679	1608	1477
$\varepsilon[Re_{1,j}]$	119	117	111	95	101	80	69	70	64	56	51
$100k_{1,j}$	1,6	1,6	1,6	1,7	1,6	1,8	1,8	1,7	1,8	1,8	1,9
$100\varepsilon[k_{1,j}]$	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1

č.m.	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
$Re_{1,j}$	1374	1304	1179	1091	974	874	772	645	526	244	67
$\varepsilon[Re_{1,j}]$	50	42	54	46	39	32	26	20	15	20	2
$100k_{1,j}$	1,8	1,5	1,5	1,6	1,7	1,8	2,0	2,5	3,1	10	91
$100\varepsilon[k_{1,j}]$	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	2	11

Tab. 9: Závislost součinitele odporu 2. trubice na Reynoldsově čísle

č.m.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$Re_{2,j}$	1432	1334	1254	1124	1097	1048	1031	935	917
$\varepsilon[Re_{2,j}]$	44	37	33	30	31	31	32	24	25
$100k_{2,j}$	1,2	1,2	1,3	1,5	1,5	1,6	1,6	1,8	1,8
$100\varepsilon[k_{2,j}]$	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1

č.m.	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$Re_{2,j}$	816	768	645	534	428	431	337	152	100
$\varepsilon[Re_{2,j}]$	20	19	16	14	11	11	9	6	3
$100k_{2,j}$	2,0	2,1	2,5	3,6	4,1	3,6	4,6	10,3	15
$100\varepsilon[k_{2,j}]$	0,1	0,1	0,1	0,2	0,2	0,2	0,3	0,9	1

Tab. 10: Závislost součinitele odporu 3. trubice na Reynoldsově čísle

č.m.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$Re_{3,j}$	1849	1820	1764	1744	1665	1634	1506	1394	1210	1094	983	843	635	508	391	108
$\varepsilon[Re_{3,j}]$	66	66	62	61	60	60	47	41	35	30	35	29	19	14	43	4
$100k_{3,j}$	1,8	1,7	1,6	1,4	1,2	1,0	1,1	1,1	1,3	1,4	1,6	1,9	2,5	3,3	4,3	37
$100\varepsilon[k_{3,j}]$	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,2	0,2	1,0	3

V oblasti laminárního proudění graf proložím funkcí (8) (zde již není potřeba regrese, protože jsem ji provedl při úpravě poloměru trubice).

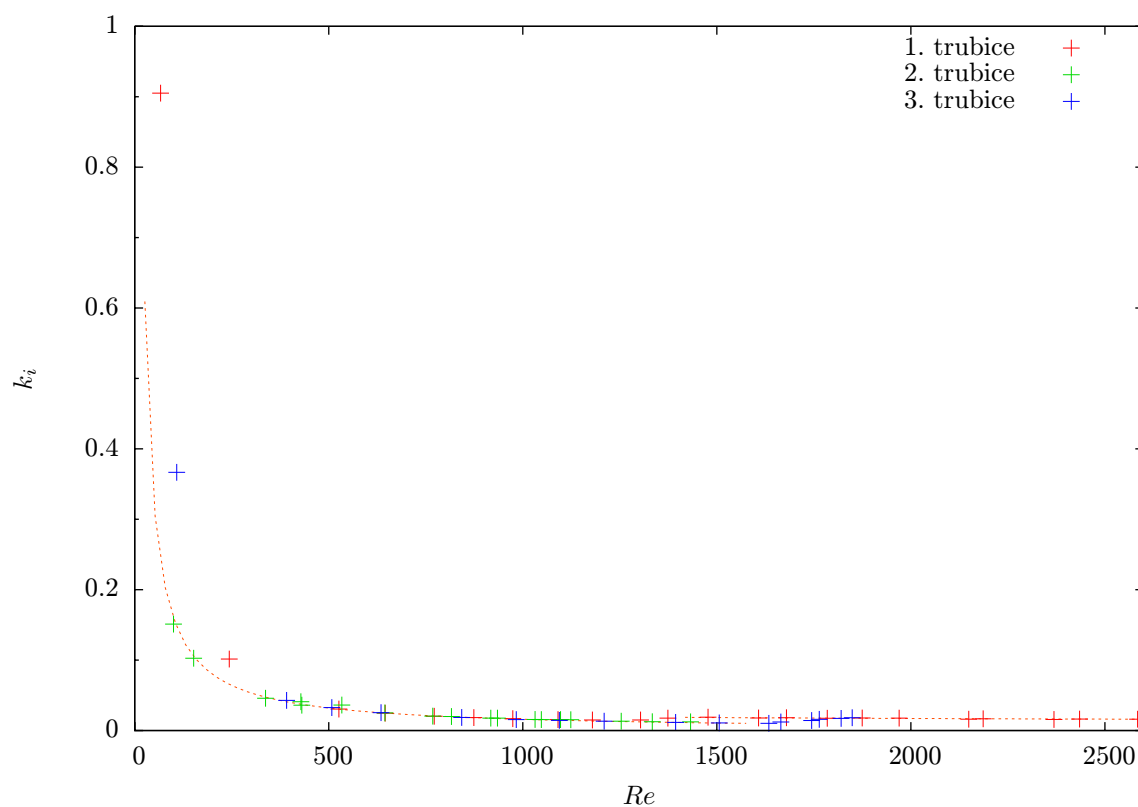
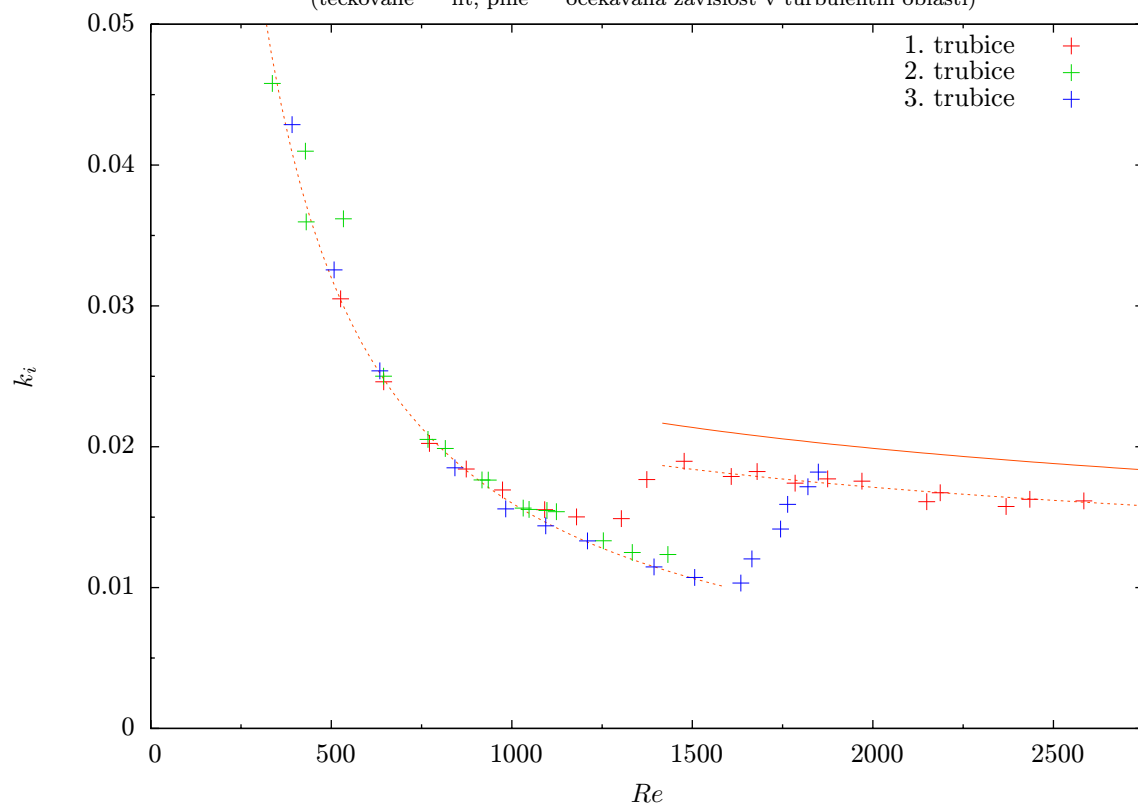
Výsledné závislosti v oblasti turbulentního proudění určím metodou nejmenších čtverců [5] pro funkci  $k_i(Re) = \beta_1 / \sqrt[4]{Re}$  (z (9)) (fituji pouze měření 1. trubice, protože pro ostatní trubice mám z turbulentní oblasti málo, resp. žádné měření), přičemž v souboru pro účely regrese ponechám pouze body z oblasti turbulentního proudění, tedy měření 1. trubice č. 1 – 11.

Výsledná závislost v oblasti turbulentního proudění:

$$k_i(Re) = \beta_1 / \sqrt[4]{Re}, \text{ kde } \beta_1 = 0,115 \pm 0,002$$

(Uvádím krajní statistickou chybu, rovnou trojnásobku standardní odchylky.)

Graf 2a: Závislosti součinitele odporu na Reynoldsově číse

Graf 2b: Závislosti součinitele odporu na Reynoldsově číse — detail  
(tečkovaně — fit, plně — očekávaná závislost v turbulentní oblasti)

Na grafu jsou dobře vidět laminární oblasti všech trubic, přechodové oblasti 1. a 3. trubice a turbulentní oblast 1. trubice.

## Diskuse

Při měření v přechodové oblasti vodní sloupec v manometru značně kolísal (je vidět i na *grafu 1* (velké chyby měření  $\Delta p$ )), které se tak stalo v této oblasti zdrojem největších chyb. Kolísání je důsledkem kolísání statického tlaku v trubici, které je způsobeno častým střídáním charakteru proudění mezi laminárním a turbulentním za daných podmínek.

Při odečítání výšky vodního sloupce v manometru a v odměrném válci jsem se snažil pro každé měření odhadnout korekci k chybě způsobené kapilární elevací, v případě manometru — který měl malý vnitřní průměr — však byla tato korekce jen přibližná, v případě odměrného válce jsem se snažil chybu zmenšit tím, že jsem odebíral větší množství vody.

Chyba měření času je dána reakční dobou člověka (v daném případě je ale možná menší, neboť si lze okamžik konce časového intervalu zvolit libovolně) a chybou stopky. Tuto chybu jsem se opět snažil zmenšit tím, že jsem volil delší intervaly.

Naměřené závislosti objemového průtoku na úbytku statického tlaku v laminární oblasti se pro každou trubici kvalitativně shodují s očekáváním: závislosti jsou zde lineární. Lze si všimnout, že u měření pro velmi malé úbytky statického tlaku je nepřiměřeně malý průtok. Domnívám se, že tuto odchylku způsobuje jev, který vzniká u ústí trubice v důsledku kapilarity vody — kapilární síla na chvíli zamezí průtoku a když tlak vzroste nad určitou mez, rychle se uvolní kapička; skutečnost, že doba uvolňování kapičky je menší než doba jejího zadržení, by pak vedla ke zvýšení průměrného statického tlaku.

Hodnoty poloměrů trubíc vypočítané ze směrnic těchto závislostí s použitím Poiseuillovy rovnice jsou trochu menší než ty přímo změřené, což je vidět i v *grafu 1*. Ačkoliv se v případě 1. a 2. trubice shodují v rámci chyby, v případě 3. trubice ne. K těmto odchylkám tedy jistě přispěla chyba posuvného měřidla, ta však pravděpodobně není jedinou významnou příčinou. Další nepřesnost přímého měření je potenciálně způsobená rozdílností poloměrů trubíc v místě měření (u ústí) od poloměrů v místě manometru.

Na *grafu 1* jsou dobře vidět zmíněné odchylky od lineární závislosti pro nízká  $\Delta p$ , začátek přechodové oblasti 2. trubice, rozhraní mezi laminární a přechodovou oblastí 1. trubice: kolem  $\Delta p = 500$  Pa a 3. trubice: kolem  $\Delta p = 120$  Pa a mezi přechodovou a turbulentní oblastí 1. trubice: kolem  $\Delta p = 800$  Pa a 3. trubice: kolem  $\Delta p = 2500$  Pa.

Naměřené závislosti součinitele odporu trubíc na Reynoldsově čísla se kvalitativně shodují s očekáváním. V oblasti laminárního proudění je závislost nepřímá úměrnost, v oblasti turbulentního proudění je  $k_i$  nepřímo úměrné 4. odmocnině  $Re$ . Kvantitativní shoda v oblasti laminárního proudění je důsledkem použití poloměrů vypočítaných z Poiseuillovy rovnice. V oblasti turbulentního proudění se závislost pro 1. trubici kvantitativně neshoduje s udávanou závislostí (což je znázorněno i na *grafu 2b*) — koeficient úměrnosti vypočítaný z naměřených hodnot je o něco menší než udávaná hodnota 0,133.

Na *grafu 2b* jsou dobře vidět rozhraní mezi laminární a přechodovou oblastí 1. trubice: kolem  $Re = 1000$  a 3. trubice: kolem  $Re = 1500$  a rozhraní mezi přechodovou a turbulentní oblastí 1. trubice: kolem  $Re = 1500$ . Tato rozhraní se shodují s rozhraními viditelnými na *grafu 1*.

## Závěr

Naměřené závislosti objemového průtoku na úbytku statického tlaku s příslušnými chybami jsou uvedeny v *tabulkách 2 – 4*.

Grafy těchto závislostí spolu s teoretickými závislostmi v oblasti laminárního proudění pro přímo změřené poloměry trubíc jsou zakresleny v *grafu 1*.

Poloměry trubíc určené ze směrnic laminární oblasti těchto závislostí:

$$\begin{aligned} r_1 &= (1,59 \pm 0,01) \text{ mm} \\ r_2 &= (1,068 \pm 0,006) \text{ mm} \\ r_3 &= (1,403 \pm 0,008) \text{ mm} \end{aligned}$$

Závislosti  $k_i(Re)$  jsou uvedeny v *tabulkách 8 – 10*.

Jejich grafy jsou zakresleny v *grafu 2a* a jeho detailu — *grafu 2b*. V *grafu 2b* je navíc zakreslena udávaná závislost v oblasti turbulentního proudění.

## Reference

- [1] KVASNICA, Jozef. *Mechanika*. 1. vydání. Praha: Academia, 1988.
- [2] BROŽ, Jaromír. *Základy fyzikálních měření (I)*. 1. vydání. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, n. p., 1983.
- [3] MIKULČÁK, Jiří. *Matematické, fyzikální a chemické tabulky a vzorce pro střední školy*. 1. vydání. Praha: Prometheus, spol. s r. o., 2005. ISBN 80-7196-264-3.
- [4] BROŽ, Jaromír. *Základy fyzikálních měření (I)*. 1. vydání. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, n. p., 1967.
- [5] MARQUARDT, Donald. *An Algorithm for Least-Squares Estimation of Nonlinear Parameters*. SIAM Journal on Applied Mathematics 11: 431-441, 1963.